

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Arithmétique : diviseurs, PGCD et nombres premiers

> Décomposer un nombre en facteurs premiers, c'est en donner la **carte d'identité** : tous ses diviseurs s'en déduisent, et le PGCD de deux nombres se lit d'un coup d'œil.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. Un nombre premier n'a exactement que deux diviseurs : 1 et lui-même.
2. Tout entier supérieur à 1 se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.
3. Une fraction est irréductible quand son numérateur et son dénominateur ont pour PGCD 1.

Diviseurs et nombres premiers

À SAVOIR — NOMBRE PREMIER

Un entier est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Les premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$

PIÈGE À ÉVITER

1 n'est pas premier : il n'a qu'un seul diviseur. Et 2 est le seul nombre premier pair.

Décomposer en facteurs premiers

COMMENT FAIRE — LA MÉTHODE

On divise successivement par les nombres premiers, en commençant par le plus petit possible, jusqu'à obtenir 1.

$360 = 2\times180 = 2^2\times90 = 2^3\times45 = 2^3\times3^2\times5$.

ASTUCE

On s'arrête de chercher des diviseurs dès que le carré du diviseur testé dépasse le nombre : pour tester si 97 est premier, il suffit d'essayer jusqu'à 9, car $10^2>97$.

Le PGCD

À SAVOIR — DÉFINITION

Le **PGCD** de deux entiers est le plus grand de leurs diviseurs communs.

COMMENT FAIRE — PAR LES FACTEURS PREMIERS

On décompose les deux nombres et on garde les facteurs communs, chacun avec son plus petit exposant.

$360 = 2^3\times3^2\times5$ et $84 = 2^2\times3\times7$, donc $\mathrm{PGCD} = 2^2\times3 = 12$.

COMMENT FAIRE — PAR L'ALGORITHME D'EUCLIDE

On remplace le couple (a,b) par (b,r) où r est le reste de a par b, jusqu'à un reste nul. Le dernier reste non nul est le PGCD.

$(360,84) \to (84,24) \to (24,12) \to (12,0)$. Le PGCD vaut 12.

Fractions irréductibles

RÈGLE — RENDRE UNE FRACTION IRRÉDUCTIBLE

On divise numérateur et dénominateur par leur PGCD. La fraction obtenue ne se simplifie plus.

$\frac{360}{84} = \frac{360\div12}{84\div12} = \frac{30}{7}$.

À SAVOIR — NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

Deux entiers sont **premiers entre eux** si leur PGCD vaut 1. C'est exactement la condition pour qu'une fraction soit irréductible.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- reconnaître un nombre premier
- décomposer un entier en produit de facteurs premiers
- calculer un PGCD par les facteurs premiers et par Euclide
- rendre une fraction irréductible

- dire si deux entiers sont premiers entre eux

On nous pose souvent ces questions

Qu'est-ce qu'un nombre premier ?

C'est un entier qui possède exactement deux diviseurs, 1 et lui-même. Le nombre 1 n'est donc pas premier, et 2 est le seul nombre premier pair.

Comment calculer un PGCD ?

Soit en décomposant les deux nombres en facteurs premiers et en gardant les facteurs communs avec leur plus petit exposant, soit par l'algorithme d'Euclide, qui enchaîne les divisions jusqu'à un reste nul.

Comment rendre une fraction irréductible ?

On divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. La fraction obtenue ne se simplifie plus, car ses deux termes sont premiers entre eux.