

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Continuité, dérivation et convexité

> La dérivée seconde dit comment la courbe se **courbe** : vers le haut si elle est positive, vers le bas si elle est négative.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une solution, la stricte monotonie son unicité.
2. f convexe équivaut à $f'' \geq 0$, et la courbe est alors au-dessus de ses tangentes.
3. Un point d'inflexion est un point où f'' s'annule en changeant de signe.

Continuité

À SAVOIR — DÉFINITION INTUITIVE

Une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe se trace sans lever le crayon. Toute fonction dérivable est continue ; la réciproque est fausse.

Le théorème des valeurs intermédiaires

RÈGLE — ÉNONCÉ ET COROLLAIRE

Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution dans $[a\ ;\ b]$.

Si de plus f est **strictement monotone**, cette solution est **unique**.

COMMENT FAIRE — RÉDIGER CORRECTEMENT

Il faut citer trois choses : la continuité, la monotonie stricte si l'on veut l'unicité, et le fait que k soit compris entre les images des bornes.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x)=x^3+x-1$ est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$, avec $f(0)=-1$ et $f(1)=1$. Comme 0 est compris entre -1 et 1, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans $[0\ ;\ 1]$.

PIÈGE À ÉVITER

Sans la stricte monotonie, on ne peut affirmer que l'existence. Conclure à l'unicité sans l'avoir justifiée coûte des points.

Convexité

RÈGLE — DÉFINITIONS

f est **convexe** sur I si f' est croissante sur I, ce qui équivaut à $f''\geq 0$. Sa courbe est alors au-dessus de chacune de ses tangentes.

f est **concave** si $f''\leq 0$: la courbe est au-dessous de ses tangentes.

ASTUCE

Moyen mnémotechnique : une fonction convexe a une courbe « en forme de coupe », comme x^2. Concave, elle est retournée.

Points d'inflexion

RÈGLE — DÉFINITION

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente, c'est-à-dire où f'' s'annule **en changeant de signe**.

PIÈGE À ÉVITER

L'annulation seule ne suffit pas : pour $f(x)=x^4$, $f''(0)=0$ mais f'' reste positive, il n'y a pas d'inflexion.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x)=x^3$: $f''(x)=6x$, qui change de signe en 0. L'origine est un point d'inflexion, la fonction est concave avant et convexe après.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- appliquer le théorème des valeurs intermédiaires en citant toutes les hypothèses

- justifier l'unicité d'une solution
- déterminer la convexité à partir du signe de f''
- reconnaître un point d'inflexion
- interpréter la position de la courbe par rapport à ses tangentes

On nous pose souvent ces questions

Que garantit le théorème des valeurs intermédiaires ?

L'existence d'au moins une solution à une équation, à condition que la fonction soit continue. Il faut ajouter la stricte monotonie pour garantir l'unicité.

Comment étudier la convexité d'une fonction ?

On étudie le signe de la dérivée seconde : positive, la fonction est convexe ; négative, elle est concave.

Une dérivée seconde nulle donne-t-elle toujours un point d'inflexion ?

Non. Il faut qu'elle change de signe. Pour la fonction puissance quatrième, la dérivée seconde s'annule en zéro sans changer de signe.