

Dérivation

Le nombre dérivé est le **coefficient directeur de la tangente**. Tout le calcul de dérivées sert à obtenir cette pente sans tracer quoi que ce soit.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $f'(a)$ est la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.
2. Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
3. $(uv)' = u'v + uv'$: la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Le nombre dérivé

À SAVOIR — DU TAUX DE VARIATION À LA PENTE

Le taux de variation entre a et $a+h$ vaut $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$: c'est le coefficient directeur de la sécante. Quand h tend vers 0, cette sécante tend vers la **tangente**, et le taux vers $f'(a)$.

RÈGLE — ÉQUATION DE LA TANGENTE

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x) = x^2$ en $a = 3$: $f'(x) = 2x$ donc $f'(3) = 6$ et $f(3) = 9$. La tangente a pour équation $y = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$.

Les dérivées usuelles

RÈGLE — LE TABLEAU

$$(k)' = 0 \quad ; \quad (x)' = 1 \quad ; \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad ; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad (e^x)' = e^x.$$

Les opérations

RÈGLE — LES QUATRE RÈGLES

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

PIÈGE À ÉVITER

$(uv)'$ n'est pas $u'v'$. Test rapide : avec $u = v = x$, $(x^2)' = 2x$ alors que $u'v' = 1$.

ASTUCE

Pour le quotient, l'ordre du numérateur compte : c'est $u'v - uv'$, jamais l'inverse. Le signe moins vient toujours en deuxième position.

EXEMPLE GUIDÉ

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3} : \text{avec } u = 2x+1 \text{ et } v = x-3, f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

Composée simple

RÈGLE – $(u^n)'$ ET e^u

$$(u^n)' = n u' u^{n-1} \text{ et } (e^u)' = u' e^u.$$

$$((3x+1)^4)' = 4 \times 3 \times (3x+1)^3 = 12(3x+1)^3.$$

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- interpréter $f'(a)$ comme la pente de la tangente
- écrire l'équation d'une tangente
- dériver les fonctions usuelles
- appliquer les règles de dérivation d'un produit et d'un quotient
- dériver une expression du type u^n ou e^u

On nous pose souvent ces questions

Que représente le nombre dérivé ?

C'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point considéré.

La dérivée d'un produit est-elle le produit des dérivées ?

Non. Elle vaut $u'v + uv'$ plus $u'v$ prime. Un test simple avec u et v égaux à x le confirme.

Comment écrire l'équation d'une tangente ?

Elle vaut $f'(a)(x - a) + f(a)$, le tout ajouté à $f(a)$.