

Fonction exponentielle

L'exponentielle transforme les **sommes en produits**. C'est la seule fonction, à un coefficient près, qui soit égale à sa propre dérivée.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$: la relation fondamentale, dont tout le reste découle.
2. $(e^x)' = e^x$, donc l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $e^x > 0$ pour tout réel x : l'exponentielle ne s'annule jamais.

Définition et premières propriétés

À SAVOIR — LA FONCTION

L'exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note $\exp(x)$ ou e^x , avec $e \approx 2,718$.

RÈGLE — SIGNE ET VALEURS PARTICULIÈRES

$e^x > 0$ pour tout x ; $e^0 = 1$; $e^1 = e$.

Les propriétés algébriques

RÈGLE — LES FORMULES

$$e^{a+b} = e^a e^b ; e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ; (e^a)^n = e^{na}.$$

ASTUCE

Ce sont exactement les règles des puissances. Retenir la première suffit : les autres s'en déduisent.

EXEMPLE GUIDÉ

$$\frac{e^5 \times e^{-2}}{e^4} = e^{5-2-4} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Dérivée et variations

RÈGLE — DÉRIVÉE

$(e^x)' = e^x$ et, plus généralement, $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

À SAVOIR — VARIATIONS ET LIMITES

Comme $e^x > 0$, la dérivée est toujours positive : l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x) = e^{-2x+1}$: $f'(x) = -2e^{-2x+1}$, toujours négative, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Équations et inéquations

RÈGLE — LES ÉQUIVALENCES

$e^a = e^b$ équivaut à $a = b$, et $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$, puisque l'exponentielle est strictement croissante.

EXEMPLE GUIDÉ

$e^{3x-1} = e^{x+5}$ donne $3x-1 = x+5$, donc $x = 3$.

PIÈGE À ÉVITER

Une équation comme $e^x = -2$ n'a aucune solution : l'exponentielle est strictement positive. Vérifiez ce point avant de vous lancer dans un calcul.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- utiliser la relation $e^{a+b} = e^a e^b$
- simplifier une expression avec des exponentielles
- dériver une fonction du type e^u
- étudier les variations d'une fonction exponentielle
- résoudre une équation ou une inéquation avec l'exponentielle

On nous pose souvent ces questions

Quelle est la propriété fondamentale de l'exponentielle ?

L'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles. Toutes les autres formules en découlent.

L'exponentielle peut-elle être négative ou nulle ?

Non, jamais. Elle est strictement positive pour tout réel, ce qui rend certaines équations impossibles sans calcul.

Comment résoudre une équation entre deux exponentielles ?

Comme l'exponentielle est strictement croissante, l'égalité des exponentielles équivaut à l'égalité des exposants.