

Géométrie dans l'espace : vecteurs, droites et plans

Dans l'espace, une droite se décrit par un **point et un vecteur directeur**, un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. Trois vecteurs sont coplanaires si l'un s'écrit comme combinaison des deux autres.
2. Une droite se donne par une représentation paramétrique à un paramètre.
3. Deux droites non coplanaires n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles.

Vecteurs de l'espace

À SAVOIR — COLINÉARITÉ ET COPLANARITÉ

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

ASTUCE

Pour montrer que quatre points sont coplanaires, on montre que trois vecteurs construits sur ces points le sont.

Repérage

À SAVOIR — BASE ET REPÈRE

Un repère de l'espace est $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ non coplanaires. Chaque point a alors un unique triplet de coordonnées.

Représentations paramétriques

RÈGLE — DROITE

Droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

RÈGLE — PLAN

Plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires : même principe, avec **deux** paramètres t et s .

PIÈGE À ÉVITER

Une représentation paramétrique n'est pas unique : changer de point ou multiplier le vecteur directeur par un réel non nul donne la même droite. Pour vérifier que deux

systèmes décrivent la même droite, on teste la colinéarité des vecteurs directeurs et l'appartenance d'un point.

Positions relatives

À SAVOIR — DEUX DROITES

Elles peuvent être **coplanaires** — alors sécantes, parallèles ou confondues — ou **non coplanaires**, auquel cas elles ne se coupent pas sans être parallèles. Ce dernier cas n'existe pas dans le plan.

COMMENT FAIRE — CHERCHER UNE INTERSECTION

On écrit les deux représentations paramétriques avec des paramètres **différents**, puis on résout le système. Sans solution et sans colinéarité des vecteurs directeurs, les droites ne sont pas coplanaires.

PIÈGE À ÉVITER

Utiliser le même nom de paramètre pour les deux droites fausse le système. Nommez-les t et s .

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- tester la colinéarité et la coplanarité de vecteurs
- écrire la représentation paramétrique d'une droite
- écrire la représentation paramétrique d'un plan
- déterminer l'intersection de deux droites
- reconnaître deux droites non coplanaires

On nous pose souvent ces questions

Que signifie que trois vecteurs sont coplanaires ?

Que l'un d'eux s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres. Cela revient à dire qu'ils sont contenus dans un même plan.

Une représentation paramétrique est-elle unique ?

Non. Changer de point de référence ou multiplier le vecteur directeur par un réel non nul décrit la même droite.

Deux droites sans point commun sont-elles forcément parallèles ?

Dans l'espace, non. Elles peuvent être non coplanaires, c'est-à-dire ne pas se couper tout en n'étant pas parallèles. Ce cas n'existe pas dans le plan.