

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Homothétie, agrandissement et réduction

> Une homothétie **agrandit ou réduit** une figure depuis un centre. Le rapport commande tout : sa valeur absolue fixe la taille, son signe fixe le côté.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. L'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k vérifie $OM' = |k| \times OM$.
2. Si $k > 0$, l'image est du même côté de O ; si $k < 0$, elle est de l'autre côté.
3. Un rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Définition et construction

À SAVOIR — HOMOTHÉTIE DE CENTRE O ET DE RAPPORT K

Le point M', image de M, est aligné avec O et M, et vérifie $OM' = |k| \times OM$. Pour $k > 0$, M' est du même côté que M par rapport à O ; pour $k < 0$, il est de l'autre côté.

COMMENT FAIRE — CONSTRUIRE UNE IMAGE

1. Tracer la droite (OM).
2. Reporter $|k| \times OM$ à partir de O.
3. Choisir le côté d'après le signe de k.

EXEMPLE GUIDÉ

Avec $k = -2$ et $OM = 3$ cm, le point M' est sur la droite (OM), à 6 cm de O, du côté opposé à M.

Ce qu'une homothétie conserve

RÈGLE — LES PROPRIÉTÉS

Elle conserve les **angles**, l'alignement, le parallélisme et les rapports de longueurs. Elle ne conserve pas les longueurs, sauf si $|k| = 1$. L'image d'une droite est une droite parallèle.

ASTUCE

Une homothétie de rapport -1 est exactement une symétrie centrale de centre O.

Agrandissement et réduction

RÈGLE — LONGUEURS, AIRES, VOLUMES

Dans un agrandissement de rapport k : longueurs $\times|k|$, aires $\times k^2$, volumes $\times|k|^3$.

EXEMPLE GUIDÉ

Une maquette à l'échelle $\frac{1}{20}$ d'un bâtiment : les longueurs sont 20 fois plus petites, les surfaces 400 fois, les volumes $8\,000$ fois.

PIÈGE À ÉVITER

Doubler les dimensions d'un solide ne double pas son volume : cela le multiplie par huit. C'est une erreur classique dans les exercices de contenance.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- construire l'image d'un point par une homothétie
- tenir compte du signe du rapport
- citer ce que conserve une homothétie
- calculer l'effet d'un rapport sur une aire
- calculer l'effet d'un rapport sur un volume

On nous pose souvent ces questions

Que se passe-t-il quand le rapport d'une homothétie est négatif ?

L'image se trouve de l'autre côté du centre par rapport au point de départ. Un rapport égal à moins un correspond exactement à une symétrie centrale.

Une homothétie conserve-t-elle les longueurs ?

Non, sauf si la valeur absolue du rapport vaut 1. Elle conserve en revanche les angles,

l'alignement et le parallélisme.

Si l'on double les dimensions d'un solide, que devient son volume ?

Il est multiplié par huit, car les volumes varient comme le cube du rapport.