

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Intégration

> Une intégrale est une **aire algébrique**. Le théorème fondamental la relie aux primitives, ce qui la rend calculable.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f.
2. Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, l'intégrale est l'aire sous la courbe, en unités d'aire.
3. Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Définition et calcul

RÈGLE — LE THÉORÈME FONDAMENTAL

Si F est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

EXEMPLE GUIDÉ

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Interprétation en aire

À SAVOIR — AIRE ALGÉBRIQUE

Si $f \geq 0$ sur $[a\ ;\ b]$, l'intégrale est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire.

Si $f \leq 0$, l'intégrale est l'**opposé** de cette aire.

PIÈGE À ÉVITER

Une intégrale nulle ne signifie pas que la fonction est nulle : les aires au-dessus et au-dessous de l'axe peuvent se compenser. Pour une aire géométrique, il faut découper selon le signe de f.

Les propriétés

RÈGLE — LES RÈGLES DE CALCUL

Linéarité : $\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$

Relation de Chasles : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f\ .$

Positivité : si $f \geq 0$ sur $[a\ ;\ b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f \geq 0.$

Comparaison : si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g.$

Valeur moyenne

RÈGLE — DÉFINITION

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$: c'est la hauteur du rectangle de base $[a\ ;\ b]$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe.

Intégration par parties

RÈGLE — LA FORMULE

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

ASTUCE

On choisit pour u la fonction qui se **simplifie** en dérivant — un polynôme ou un logarithme — et pour v' celle qui s'intègre facilement, comme une exponentielle.

EXEMPLE GUIDÉ

$\int_0^1 xe^x\,dx$: avec $u = x$ et $v' = e^x$, on obtient $\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1$.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- calculer une intégrale à l'aide d'une primitive
- interpréter une intégrale comme une aire algébrique
- calculer une aire en découpant selon le signe de f
- appliquer la relation de Chasles et la linéarité
- mener une intégration par parties

On nous pose souvent ces questions

Une intégrale nulle signifie-t-elle que la fonction est nulle ?

Non. Les aires situées au-dessus et au-dessous de l'axe peuvent se compenser. Pour calculer une aire géométrique, il faut découper selon le signe de la fonction.

Comment calculer une intégrale ?

On cherche une primitive de la fonction, puis on calcule la différence entre sa valeur à la borne supérieure et sa valeur à la borne inférieure.

Comment choisir u et v prime dans une intégration par parties ?

On prend pour u la fonction qui se simplifie en dérivant, souvent un polynôme ou un logarithme, et pour v prime celle qui s'intègre facilement.