

Limites de fonctions

Une limite décrit le **comportement** d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition. Les asymptotes en sont la traduction graphique.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. Une limite infinie en un réel a donne une asymptote verticale d'équation $x = a$.
2. Une limite finie ℓ en l'infini donne une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
3. L'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x .

Limites en l'infini

COMMENT FAIRE — POLYNÔMES ET QUOTIENTS

En $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son **terme de plus haut degré**, et un quotient de polynômes que le quotient de leurs termes de plus haut degré.

EXEMPLE GUIDÉ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{2x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

PIÈGE À ÉVITER

Cette règle ne vaut que pour les limites **en l'infini**. En un réel, il faut remplacer, et étudier le signe du dénominateur s'il s'annule.

Limites en un réel

COMMENT FAIRE — QUAND LE DÉNOMINATEUR S'ANNULE

Si le numérateur ne s'annule pas, la limite est infinie. Le signe dépend de celui du dénominateur, qu'il faut donc étudier à gauche et à droite séparément.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x) = \frac{1}{x-2}$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 2$ est asymptote verticale.

Les asymptotes

RÈGLE — LES DEUX CAS AU PROGRAMME

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale**.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale**.

Les croissances comparées

RÈGLE — LES RÉSULTATS À CONNAÎTRE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

ASTUCE

Une phrase résume tout : l'exponentielle écrase les puissances, qui écrasent le logarithme. En cas de doute sur une forme indéterminée, c'est le terme le plus « fort » qui impose sa limite.

Lever une indétermination

COMMENT FAIRE — LES TECHNIQUES

Factoriser par le terme dominant ; simplifier une fraction ; multiplier par la quantité conjuguée en présence d'une racine ; reconnaître une croissance comparée.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- déterminer la limite d'un quotient de polynômes en l'infini
- étudier une limite en un réel qui annule le dénominateur
- reconnaître une asymptote verticale ou horizontale
- appliquer les croissances comparées
- lever une forme indéterminée par factorisation ou conjugaison

On nous pose souvent ces questions

Comment calculer la limite d'un quotient de polynômes en l'infini ?

On ne garde que les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur, puis on simplifie. Cette règle ne vaut qu'en l'infini.

Qu'est-ce qu'une asymptote verticale ?

C'est une droite d'équation x égale a , obtenue lorsque la fonction tend vers l'infini quand x s'approche de a .

Que disent les croissances comparées ?

Que l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x , et que toute puissance de x l'emporte sur le logarithme.