

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Limites de fonctions

> Une limite décrit le **comportement** d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition. Les asymptotes en sont la traduction graphique.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. Une limite infinie en un réel a donne une asymptote verticale d'équation $x = a$.
2. Une limite finie ℓ en l'infini donne une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
3. L'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x.

Limites en l'infini

COMMENT FAIRE — POLYNÔMES ET QUOTIENTS

En $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son **terme de plus haut degré**, et un quotient de polynômes que le quotient de leurs termes de plus haut degré.

EXEMPLE GUIDÉ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x + 5}{2x^2 + 7} = \lim \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

PIÈGE À ÉVITER

Cette règle ne vaut que pour les limites **en l'infini**. En un réel, il faut remplacer, et étudier

le signe du dénominateur s'il s'annule.

Limites en un réel

COMMENT FAIRE — QUAND LE DÉNOMINATEUR S'ANNULE

Si le numérateur ne s'annule pas, la limite est infinie. Le signe dépend de celui du dénominateur, qu'il faut donc étudier à gauche et à droite séparément.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x)=\frac{1}{x-2}$: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$. La droite $x=2$ est asymptote verticale.

Les asymptotes

RÈGLE — LES DEUX CAS AU PROGRAMME

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale**.

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell$, la droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote horizontale**.

Les croissances comparées

RÈGLE — LES RÉSULTATS À CONNAÎTRE

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$.

ASTUCE

Une phrase résume tout : l'exponentielle écrase les puissances, qui écrasent le logarithme. En cas de doute sur une forme indéterminée, c'est le terme le plus « fort » qui impose sa limite.

Lever une indétermination

COMMENT FAIRE — LES TECHNIQUES

Factoriser par le terme dominant ; simplifier une fraction ; multiplier par la quantité conjuguée en présence d'une racine ; reconnaître une croissance comparée.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- déterminer la limite d'un quotient de polynômes en l'infini
- étudier une limite en un réel qui annule le dénominateur
- reconnaître une asymptote verticale ou horizontale
- appliquer les croissances comparées
- lever une forme indéterminée par factorisation ou conjugaison

On nous pose souvent ces questions

Comment calculer la limite d'un quotient de polynômes en l'infini ?

On ne garde que les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur, puis on simplifie. Cette règle ne vaut qu'en l'infini.

Qu'est-ce qu'une asymptote verticale ?

C'est une droite d'équation x égale a, obtenue lorsque la fonction tend vers l'infini quand x s'approche de a.

Que disent les croissances comparées ?

Que l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x, et que toute puissance de x l'emporte sur le logarithme.