

Logarithme népérien

Le logarithme transforme les **produits en sommes**. C'est la fonction réciproque de l'exponentielle, ce qui explique toutes ses propriétés.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour a et b strictement positifs.
- $\ln x = y$ équivaut à $x = e^y$: les deux fonctions sont réciproques.
- $\ln$ est définie et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Définition

À SAVOIR — RÉCIPROQUE DE L'EXPONENTIELLE

Pour $x > 0$, $\ln x$ est l'unique réel y tel que $e^y = x$.

Donc $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$, et $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x .

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

PIÈGE À ÉVITER

$\ln x$ n'existe que pour $x > 0$. Avant toute résolution, écrivez l'ensemble de définition : des solutions négatives doivent être écartées à la fin.

Les propriétés algébriques

RÈGLE — LES FORMULES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

PIÈGE À ÉVITER

$\ln(a+b)$ ne se simplifie pas. Il n'existe aucune formule pour le logarithme d'une somme.

EXEMPLE GUIDÉ

$\ln 8 - \ln 2 = \ln 4 = 2 \ln 2$.

Dérivée, variations, limites

RÈGLE — LES RÉSULTATS

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

$\ln$ est strictement croissante ; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, du signe de x . La fonction décroît puis croît, avec un minimum en 0.

Équations et inéquations

RÈGLE — LES ÉQUIVALENCES

Pour $a > 0$ et $b > 0$: $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$, et $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.

COMMENT FAIRE — LA MÉTHODE

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Regrouper les logarithmes en un seul de chaque côté.
3. Supprimer les $\ln$.
4. Écarter les solutions hors de l'ensemble de définition.

EXEMPLE GUIDÉ

$\ln(x) + \ln(x-3) = \ln 4$ avec $x > 3$. On obtient $\ln(x(x-3)) = \ln 4$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$, de racines 4 et -1 . Seule 4 convient.

Une application

ASTUCE

Le logarithme résout les inéquations en q^n . Pour trouver le plus petit n tel que $0,9^n < 0,01$, on passe au logarithme : $n \ln(0,9) < \ln(0,01)$, et comme $\ln(0,9)$ est négatif, le sens de l'inégalité s'inverse, donnant $n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9)} \approx 43,7$, soit $n = 44$.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- utiliser la relation entre $\ln$ et $\exp$
- appliquer les propriétés algébriques du logarithme
- dériver une fonction du type $\ln u$
- résoudre une équation avec des logarithmes en écartant les valeurs interdites
- résoudre une inéquation en q^n à l'aide du logarithme

On nous pose souvent ces questions

Quelle relation lie le logarithme et l'exponentielle ?

Ce sont deux fonctions réciproques : le logarithme de l'exponentielle de x redonne x , et l'exponentielle du logarithme de x redonne x pour x strictement positif.

Existe-t-il une formule pour le logarithme d'une somme ?

Non. Seuls les produits, les quotients et les puissances se transforment. Le logarithme d'une somme ne se simplifie pas.

Pourquoi faut-il chercher l'ensemble de définition avant de résoudre ?

Parce que le logarithme n'existe que pour des nombres strictement positifs. Certaines solutions

de l'équation finale doivent être écartées.