

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Logarithme népérien

> Le logarithme transforme les **produits en sommes**. C'est la fonction réciproque de l'exponentielle, ce qui explique toutes ses propriétés.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour a et b strictement positifs.
2. $\ln x = y$ équivaut à $x = e^y$: les deux fonctions sont réciproques.
3. $\ln$ est définie et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Définition

À SAVOIR — RÉCIPROQUE DE L'EXPONENTIELLE

Pour $x>0$, $\ln x$ est l'unique réel y tel que $e^y = x$.

Donc $e^{\ln x} = x$ pour $x>0$, et $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x.

$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.

PIÈGE À ÉVITER

$\ln x$ n'existe que pour $x>0$. Avant toute résolution, écrivez l'ensemble de définition : des solutions négatives doivent être écartées à la fin.

Les propriétés algébriques

RÈGLE — LES FORMULES

$\ln(ab)=\ln a+\ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$; $\ln(a^n)=n\ln a$; $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$.

PIÈGE À ÉVITER

$\ln(a+b)$ ne se simplifie pas. Il n'existe aucune formule pour le logarithme d'une somme.

EXEMPLE GUIDÉ

$\ln 8-\ln 2=\ln 4=2\ln 2$.

Dérivée, variations, limites

RÈGLE — LES RÉSULTATS

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, et $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$.

$\ln$ est strictement croissante ; $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x)=\ln(x^2+1)$: $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, du signe de x. La fonction décroît puis croît, avec un minimum en 0.

Équations et inéquations

RÈGLE — LES ÉQUIVALENCES

Pour $a>0$ et $b>0$: $\ln a=\ln b$ équivaut à $a=b$, et $\ln a<\ln b$ équivaut à $a<b$.

COMMENT FAIRE — LA MÉTHODE

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Regrouper les logarithmes en un seul de chaque côté.
3. Supprimer les $\ln$.
4. Écarter les solutions hors de l'ensemble de définition.

EXEMPLE GUIDÉ

$\ln(x)+\ln(x-3)=\ln 4$ avec $x>3$. On obtient $\ln(x(x-3))=\ln 4$, soit $x^2-3x-4=0$, de racines 4 et -1. Seule 4 convient.

Une application

ASTUCE

Le logarithme résout les inéquations en q^n. Pour trouver le plus petit n tel que $0{,}9^n<0{,}01$, on passe au logarithme : $n\ln(0{,}9)<\ln(0{,}01)$, et comme $\ln(0{,}9)$ est négatif, le sens de

> l'inégalité s'inverse, donnant $n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9)} \approx 43{,}7$, soit $n = 44$.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- utiliser la relation entre $\ln$ et $\exp$
- appliquer les propriétés algébriques du logarithme
- dériver une fonction du type $\ln u$
- résoudre une équation avec des logarithmes en écartant les valeurs interdites
- résoudre une inéquation en q^n à l'aide du logarithme

On nous pose souvent ces questions

Quelle relation lie le logarithme et l'exponentielle ?

Ce sont deux fonctions réciproques : le logarithme de l'exponentielle de x redonne x, et l'exponentielle du logarithme de x redonne x pour x strictement positif.

Existe-t-il une formule pour le logarithme d'une somme ?

Non. Seuls les produits, les quotients et les puissances se transforment. Le logarithme d'une somme ne se simplifie pas.

Pourquoi faut-il chercher l'ensemble de définition avant de résoudre ?

Parce que le logarithme n'existe que pour des nombres strictement positifs. Certaines solutions de l'équation finale doivent être écartées.