

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Primitives et équations différentielles

> Chercher une primitive, c'est **remonter** la dérivation. Toutes les primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. F est une primitive de f si $F' = f$.
2. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
3. Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \to Ce^{ax}$.

Définition

À SAVOIR — PRIMITIVE

F est une primitive de f sur I si F est dérivable et $F' = f$ sur I. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

RÈGLE — UNICITÉ À UNE CONSTANTE PRÈS

Si F est une primitive de f, les autres sont exactement les $F + k$, avec k constante. Une condition du type $F(x_0) = y_0$ en détermine une seule.

Les primitives usuelles

RÈGLE — LE TABLEAU

$f(x)=x^n \Rightarrow F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$; $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow F(x)=\ln|x|$; $f(x)=e^x \Rightarrow F(x)=e^x$;
$f(x)=\cos x \Rightarrow F(x)=\sin x$; $f(x)=\sin x \Rightarrow F(x)=-\cos x$.

RÈGLE — FORMES COMPOSÉES

$u'u^n \Rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $\frac{u'}{u} \Rightarrow \ln|u|$; $u'e^u \Rightarrow e^u$.

ASTUCE

Le réflexe qui fait gagner du temps : repérer si la fonction ressemble à $u' \times$ quelque chose en u. C'est le cas le plus fréquent au bac.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u=x^2+1$, donc $F(x)=\ln(x^2+1)$.

PIÈGE À ÉVITER

Il n'existe pas de formule pour la primitive d'un produit ou d'un quotient quelconque. Si l'expression ne rentre dans aucune forme du tableau, il faut la transformer d'abord.

Les équations différentielles

RÈGLE — Y' = AY

Les solutions de $y'=ay$ sont les fonctions $x \to Ce^{ax}$, avec C constante réelle.

RÈGLE — Y' = AY + B

Les solutions sont $x \to Ce^{ax}-\frac{b}{a}$, pour $a \neq 0$. Le terme $-\frac{b}{a}$ est la solution constante particulière.

EXEMPLE GUIDÉ

$y'=-2y+6$: la solution constante est $y=3$, donc les solutions sont $y=Ce^{-2x}+3$.
Avec $y(0)=5$, on trouve $C=2$ et $y=2e^{-2x}+3$.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre
- déterminer les primitives des fonctions usuelles
- reconnaître une forme composée $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$ ou $u'e^u$
- déterminer la primitive vérifiant une condition initiale
- résoudre une équation différentielle $y'=ay+b$

On nous pose souvent ces questions

Une fonction a-t-elle une seule primitive ?

Non, elle en a une infinité, qui diffèrent d'une constante. Une condition initiale permet d'en sélectionner une seule.

Quelles formes composées faut-il savoir reconnaître ?

Les expressions du type u prime fois u puissance n, u prime divisé par u, et u prime fois exponentielle de u.

Quelles sont les solutions de y prime égale a y plus b ?

Les fonctions de la forme C fois exponentielle de a x, diminuée de b sur a, où C est une constante déterminée par la condition initiale.