

Probabilités conditionnelles

Conditionner, c'est **changer d'univers** : on se restreint aux cas où un événement s'est produit, et on recalcule les proportions à l'intérieur.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, avec $P(A) \neq 0$.
2. Sur un arbre, on multiplie le long d'un chemin et on additionne les chemins.
3. A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

La définition

RÈGLE — PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ se lit « probabilité de B sachant A ».

On en déduit $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

PIÈGE À ÉVITER

$P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont deux nombres différents. Les confondre est une erreur de raisonnement classique, y compris en dehors des mathématiques.

Les arbres pondérés

COMMENT FAIRE — LES TROIS RÈGLES

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.
2. La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées.
3. La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui le réalisent.

ASTUCE

Les branches du premier niveau portent des probabilités simples, celles du second niveau des probabilités conditionnelles. C'est la lecture qui perturbe le plus au début.

La formule des probabilités totales

RÈGLE — ÉNONCÉ

Si A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

EXEMPLE GUIDÉ

Une usine a deux machines : A produit 60% des pièces avec 2% de défauts, B les 40% restants avec 5% de défauts.

$$P(d[?][?]_{\text{faut}}) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,032, \text{ soit } 3,2\%.$$

$$\text{Et } P_{d[?][?]_{\text{faut}}}(A) = \frac{0,012}{0,032} = 0,375.$$

L'indépendance

RÈGLE — DÉFINITION

A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A s'est produit ne change rien à B .

PIÈGE À ÉVITER

Indépendants et incompatibles sont des notions opposées, pas synonymes. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants : si l'un se produit, l'autre devient impossible.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- calculer une probabilité conditionnelle
- construire et lire un arbre pondéré
- appliquer la formule des probabilités totales
- renverser un conditionnement
- tester l'indépendance de deux événements

On nous pose souvent ces questions

Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

On divise la probabilité de l'intersection par la probabilité de l'événement qui conditionne.

La probabilité de B sachant A est-elle égale à celle de A sachant B ?

Non, en général ces deux nombres diffèrent. Les confondre est une erreur de raisonnement courante.

Quelle différence entre indépendants et incompatibles ?

Des événements incompatibles ne peuvent pas se produire ensemble, donc si l'un se réalise l'autre devient impossible : ils ne sont pas indépendants. L'indépendance signifie au contraire que la réalisation de l'un ne change rien à l'autre.