


Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

# Produit scalaire

> Le produit scalaire transforme une question **géométrique** — un angle, une orthogonalité — en un **calcul** sur des coordonnées.

**L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS**

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\times|\vec{v}|\times\cos\theta$.
2. En coordonnées : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.
3. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

## Les définitions

**RÈGLE — TROIS EXPRESSIONS DU MÊME NOMBRE**

**Avec l'angle** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\cos\theta$.

**En coordonnées** : $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ donnent $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

**Avec les normes** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2\right)$.

**PIÈGE À ÉVITER**

Le produit scalaire est un **nombre**, pas un vecteur. Écrire « $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est colinéaire à… » n'a aucun sens.

## Les propriétés

**RÈGLE — CALCULS**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ ; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ; $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ; $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$.

**ASTUCE**

Les identités remarquables s'appliquent : $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$.

## Orthogonalité

**RÈGLE — LE CRITÈRE**

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, c'est-à-dire $xx'+yy'=0$ en coordonnées.

**EXEMPLE GUIDÉ**

$\vec{u}(3\ ;\ -2)$ et $\vec{v}(4\ ;\ 6)$ : $3\times4+(-2)\times6=0$, les vecteurs sont orthogonaux.

## Applications

**RÈGLE — THÉORÈME D'AL-KASHI**

Dans un triangle quelconque : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$.

C'est la généralisation de Pythagore : si $\widehat{A}=90[?][?]$, le dernier terme disparaît.

**COMMENT FAIRE — CALCULER UN ANGLE**

On isole le cosinus dans la formule d'Al-Kashi, ou bien on utilise $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$.

**EXEMPLE GUIDÉ**

$\vec{u}(1\ ;\ 2)$ et $\vec{v}(3\ ;\ 1)$ : $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=\sqrt{5}$, $|\vec{v}|=\sqrt{10}$, donc $\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{50}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta=45[?][?]$.

**VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE**

- calculer un produit scalaire à partir de coordonnées
- calculer un produit scalaire à partir de normes et d'un angle
- démontrer une orthogonalité
- appliquer le théorème d'Al-Kashi
- calculer un angle entre deux vecteurs

## On nous pose souvent ces questions

### Le produit scalaire est-il un vecteur ?

Non, c'est un nombre réel. C'est la source d'erreurs de rédaction les plus fréquentes sur ce

chapitre.

### Comment démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux ?

On vérifie que leur produit scalaire est nul, ce qui revient en coordonnées à vérifier que la somme des produits des coordonnées correspondantes est nulle.

### Qu'est-ce que le théorème d'Al-Kashi ?

C'est la généralisation du théorème de Pythagore à un triangle quelconque : le carré d'un côté vaut la somme des carrés des deux autres, diminuée du double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle.