

Produit scalaire

Le produit scalaire transforme une question **géométrique** — un angle, une orthogonalité — en un **calcul** sur des coordonnées.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \times |\vec{v}| \times \cos \theta$.
2. En coordonnées : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
3. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Les définitions

RÈGLE — TROIS EXPRESSIONS DU MÊME NOMBRE

Avec l'angle : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$.

En coordonnées : $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$ donnent $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Avec les normes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2)$.

PIÈGE À ÉVITER

Le produit scalaire est un **nombre**, pas un vecteur. Écrire « $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est colinéaire à... » n'a aucun sens.

Les propriétés

RÈGLE — CALCULS

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} ; \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} ; (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) ; \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2.$$

ASTUCE

Les identités remarquables s'appliquent : $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$.

Orthogonalité

RÈGLE — LE CRITÈRE

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est-à-dire $xx' + yy' = 0$ en coordonnées.

EXEMPLE GUIDÉ

$\vec{u}(3 ; -2)$ et $\vec{v}(4 ; 6)$: $3 \times 4 + (-2) \times 6 = 0$, les vecteurs sont orthogonaux.

Applications

RÈGLE — THÉORÈME D'AL-KASHI

Dans un triangle quelconque : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

C'est la généralisation de Pythagore : si $\hat{A} = 90^\circ$, le dernier terme disparaît.

COMMENT FAIRE — CALCULER UN ANGLE

On isole le cosinus dans la formule d'Al-Kashi, ou bien on utilise $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$.

EXEMPLE GUIDÉ

$\vec{u}(1 ; 2)$ et $\vec{v}(3 ; 1)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$, $|\vec{u}| = \sqrt{5}$, $|\vec{v}| = \sqrt{10}$, donc $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\theta = 45^\circ$.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- calculer un produit scalaire à partir de coordonnées
- calculer un produit scalaire à partir de normes et d'un angle
- démontrer une orthogonalité
- appliquer le théorème d'Al-Kashi
- calculer un angle entre deux vecteurs

On nous pose souvent ces questions

Le produit scalaire est-il un vecteur ?

Non, c'est un nombre réel. C'est la source d'erreurs de rédaction les plus fréquentes sur ce chapitre.

Comment démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux ?

On vérifie que leur produit scalaire est nul, ce qui revient en coordonnées à vérifier que la somme des produits des coordonnées correspondantes est nulle.

Qu'est-ce que le théorème d'Al-Kashi ?

C'est la généralisation du théorème de Pythagore à un triangle quelconque : le carré d'un côté vaut la somme des carrés des deux autres, diminuée du double produit de ces côtés par le cosinus de l'angle.