

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Produit scalaire dans l'espace et équations de plans

> Un plan se décrit par un point et un **vecteur normal**. Les coefficients de son équation cartésienne donnent directement ce vecteur.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.
2. Le plan $ax+by+cz+d=0$ admet $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal.
3. Une droite est orthogonale à un plan si son vecteur directeur est colinéaire au vecteur normal du plan.

Le produit scalaire dans l'espace

RÈGLE — EXPRESSIONS

$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ en coordonnées, et $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ avec l'angle.
$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

RÈGLE — ORTHOGONALITÉ

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Vecteur normal et équation de plan

RÈGLE — LE LIEN

Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** à un plan s'il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan. Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, ce qui donne une équation $ax+by+cz+d=0$.

ASTUCE

Réciproquement, on lit le vecteur normal directement dans l'équation : pour $2x-3y+z-5=0$, c'est $\vec{n}(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$.

EXEMPLE GUIDÉ

Plan passant par $A(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ de normal $\vec{n}(3\ ;\ 1\ ;\ -2)$: $3(x-1)+1(y-0)-2(z-2)=0$, soit $3x+y-2z+1=0$.

COMMENT FAIRE — TROUVER UN VECTEUR NORMAL

Si le plan est donné par deux vecteurs directeurs, on cherche $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ orthogonal aux deux : cela donne un système de deux équations à trois inconnues, dont on prend une solution non nulle.

Positions relatives

RÈGLE — DROITE ET PLAN

Si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$: la droite est parallèle au plan, incluse ou non. Sinon, elle le coupe en un unique point, obtenu en substituant la représentation paramétrique dans l'équation du plan.

RÈGLE — DEUX PLANS

Ils sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires, sécants sinon — leur intersection est alors une droite.

Distance d'un point à un plan

RÈGLE — FORMULE

$$d(A\ ;\ \mathcal{P})=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

PIÈGE À ÉVITER

La valeur absolue au numérateur n'est pas décorative : une distance est toujours positive.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- calculer un produit scalaire dans l'espace
- lire un vecteur normal dans une équation de plan

- déterminer l'équation cartésienne d'un plan
- étudier la position relative d'une droite et d'un plan
- calculer la distance d'un point à un plan

On nous pose souvent ces questions

Comment lire un vecteur normal dans l'équation d'un plan ?

Les coefficients de x, y et z sont directement les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Comment savoir si une droite est parallèle à un plan ?

On calcule le produit scalaire du vecteur directeur de la droite et du vecteur normal du plan. S'il est nul, la droite est parallèle au plan, incluse ou non.

Comment calculer la distance d'un point à un plan ?

On remplace les coordonnées du point dans l'équation du plan, on prend la valeur absolue du résultat, puis on divise par la norme du vecteur normal.