

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Suites : limites et récurrence

> Deux outils nouveaux : la **récurrence**, pour démontrer une propriété vraie à tout rang, et les **théorèmes de comparaison**, pour obtenir une limite sans la calculer.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. Une récurrence se rédige toujours en trois temps : initialisation, hérédité, conclusion.
2. Une suite croissante et majorée converge ; une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3. $\lim q^n = 0$ si $|q|<1$, et $+\infty$ si $q>1$.

Le raisonnement par récurrence

COMMENT FAIRE — LES TROIS ÉTAPES

Initialisation : vérifier la propriété au rang initial.
Hérédité : supposer $P(n)$ vraie pour un n quelconque fixé, et démontrer $P(n+1)$.
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

PIÈGE À ÉVITER

L'initialisation n'est pas une formalité. Une propriété peut être héréditaire sans jamais être vraie : « $2^n > 2^n + 1$ » se transmet de n à $n+1$, et pourtant elle est fausse partout.

ASTUCE

Dans l'hérédité, écrivez explicitement ce que vous supposez et ce que vous voulez obtenir. Le calcul consiste ensuite à relier les deux.

Limites de suites

RÈGLE — LIMITES DE RÉFÉRENCE

$\lim n = +\infty$, $\lim \sqrt{n} = +\infty$, $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Pour q^n : la limite vaut 0 si $-1<q<1$, $+\infty$ si $q>1$, et il n'y a pas de limite si $q \leq -1$.

À SAVOIR — FORMES INDÉTERMINÉES

Quatre formes n'ont pas de réponse immédiate : $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$. Il faut alors transformer l'écriture, en factorisant par le terme dominant.

Les théorèmes de comparaison

RÈGLE — COMPARAISON ET GENDARMES

Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.

Théorème des gendarmes : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si v_n et w_n convergent vers la même limite ℓ, alors u_n converge vers ℓ.

EXEMPLE GUIDÉ

$u_n = \frac{\sin n}{n}$ vérifie $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Les deux bornes tendent vers 0, donc $\lim u_n = 0$.

Le théorème de la limite monotone

RÈGLE — ÉNONCÉ

Une suite croissante et **majorée** converge. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$. Énoncés symétriques pour les suites décroissantes.

PIÈGE À ÉVITER

Ce théorème garantit l'existence de la limite, mais ne la donne pas. Pour l'obtenir, on résout ensuite $\ell = f(\ell)$ quand la suite vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- rédiger un raisonnement par récurrence complet
- justifier l'utilité de l'initialisation
- déterminer la limite d'une suite géométrique
- lever une forme indéterminée par factorisation
- appliquer le théorème des gendarmes et celui de la limite monotone

On nous pose souvent ces questions

Pourquoi l'initialisation d'une récurrence est-elle indispensable ?

Parce qu'une propriété peut être héréditaire sans jamais être vraie. Sans point de départ vérifié, la chaîne de déductions ne démarre pas.

Que dit le théorème de la limite monotone ?

Une suite croissante et majorée converge, et une suite croissante non majorée tend vers plus l'infini. Le théorème garantit l'existence de la limite mais ne la donne pas.

Quand utiliser le théorème des gendarmes ?

Quand on sait encadrer la suite par deux autres suites qui convergent vers la même limite, typiquement pour une expression contenant un sinus ou un cosinus.