

Variables aléatoires

> Une variable aléatoire associe un **nombre** à chaque issue. L'espérance est la moyenne que l'on obtiendrait en répétant l'expérience un très grand nombre de fois.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. La loi de X donne $P(X=x_i)$ pour chaque valeur, et la somme vaut 1.
2. $E(X)=\sum x_i\,P(X=x_i)$.
3. $E(aX+b)=aE(X)+b$ et $V(aX+b)=a^2V(X)$.

Loi de probabilité

À SAVOIR — DÉFINITION

Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience. Sa **loi** est le tableau des $P(X=x_i)$, dont la somme vaut 1.

ASTUCE

Vérifiez systématiquement que la somme des probabilités fait 1 : c'est le contrôle le plus rapide d'une loi mal construite.

L'espérance

RÈGLE — FORMULE ET SENS

$$E(X)=\sum_i x_i\,P(X=x_i)$$

C'est la valeur moyenne obtenue sur un très grand nombre de répétitions.

EXEMPLE GUIDÉ

Un jeu coûte 2 € ; on gagne 10 € avec une probabilité $\frac{1}{6}$, rien sinon. Le gain algébrique X vaut 8 avec probabilité $\frac{1}{6}$ et -2 avec probabilité $\frac{5}{6}$.

$E(X)=8\times\frac{1}{6}-2\times\frac{5}{6}=\frac{8-10}{6}=-\frac{1}{3}$. Le jeu est défavorable au joueur, d'environ 33 centimes par partie.

À SAVOIR — JEU ÉQUITABLE

Un jeu est **équitable** si l'espérance du gain algébrique est nulle.

Variance et écart type

RÈGLE — FORMULES

$V(X)=\sum_i (x_i-E(X))^2 P(X=x_i)$, ou plus commodément

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

Écart type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

ASTUCE

La variance mesure la dispersion autour de l'espérance. L'écart type lui est préféré car il s'exprime dans la même unité que X.

PIÈGE À ÉVITER

Une variance est toujours positive ou nulle. Un résultat négatif signale une erreur, le plus souvent un oubli du carré dans $(E(X))^2$.

Transformations

RÈGLE — LINÉARITÉ

$$E(aX+b)=aE(X)+b \;\;;\;\; V(aX+b)=a^2V(X) \;\;;\;\; \sigma(aX+b)=|a|\,\sigma(X).$$

EXEMPLE GUIDÉ

Ajouter une constante décale l'espérance sans modifier la dispersion : b n'apparaît pas dans la variance.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- établir la loi de probabilité d'une variable aléatoire
- calculer une espérance et l'interpréter
- déterminer si un jeu est équitable
- calculer variance et écart type
- utiliser les formules de transformation affine

On nous pose souvent ces questions

Que représente l'espérance ?

C'est la valeur moyenne que l'on obtiendrait en répétant l'expérience un très grand nombre de fois.

Qu'est-ce qu'un jeu équitable ?

Un jeu dont l'espérance du gain algébrique est nulle : à long terme, le joueur ne gagne ni ne perd.

Que devient la variance si l'on ajoute une constante ?

Elle ne change pas. Ajouter une constante décale l'espérance sans modifier la dispersion des valeurs.