

Menu
Accueil
Cours
Exercices
Contrôles
QCM
Quiz
Scratch
Problèmes
Brevet
Bac
Post-bac
LIVRES

Variations et applications de la dérivée

> Le signe de f' donne le **sens de variation** de f. Étudier une fonction revient donc à étudier le signe d'une autre fonction, souvent plus simple.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $f'>0$ sur un intervalle signifie f croissante sur cet intervalle.
2. Un extremum local s'obtient là où f' s'annule *en changeant de signe*.
3. Un problème d'optimisation se ramène à chercher l'extremum d'une fonction bien choisie.

Le théorème fondamental

RÈGLE — SIGNE DE F' ET VARIATIONS DE F

Sur un intervalle I : si $f'(x)>0$ pour tout x de I, alors f est strictement croissante sur I ; si $f'(x)<0$, elle est strictement décroissante ; si $f'(x)=0$ partout, elle est constante.

PIÈGE À ÉVITER

La conclusion vaut **sur un intervalle**. Une fonction dont la dérivée est négative sur deux intervalles séparés n'est pas décroissante sur leur réunion — c'est le cas de la fonction inverse.

Dresser un tableau de variations

COMMENT FAIRE — LA MÉTHODE COMPLÈTE

1. Déterminer l'ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et la factoriser autant que possible.
3. Étudier le signe de f'.
4. En déduire les variations et calculer les images aux bornes et aux extremums.

EXEMPLE GUIDÉ

$f(x)=x^3-3x$: $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. La dérivée est positive sur $]-\infty\,;\,-1[$, négative sur $]-1\,;\,1[$, positive ensuite. f admet donc un maximum local $f(-1)=2$ et un minimum local $f(1)=-2$.

Les extremums

RÈGLE — CONDITION

Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en a.

PIÈGE À ÉVITER

Le changement de signe est indispensable. Pour $f(x)=x^3$, $f'(0)=0$ mais la dérivée reste positive de part et d'autre : il n'y a pas d'extremum, seulement un point d'inflexion.

Optimisation

COMMENT FAIRE — LA DÉMARCHE

1. Nommer la variable et préciser l'intervalle où elle varie.
2. Exprimer la quantité à optimiser en fonction de cette variable.
3. Dériver, étudier le signe, conclure.
4. Vérifier que la solution appartient bien à l'intervalle.

EXEMPLE GUIDÉ

Parmi les rectangles de périmètre 20, lequel a l'aire maximale ? Avec x la longueur, la largeur vaut $10-x$ et l'aire $A(x)=x(10-x)$ sur $]0\,;\,10[$. $A'(x)=10-2x$ s'annule en 5 en changeant de signe : le carré de côté 5 donne l'aire maximale, 25.

ASTUCE

Ne jamais oublier l'intervalle d'étude : une solution mathématiquement correcte mais hors de l'intervalle n'a aucun sens dans le problème.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- relier le signe de f' au sens de variation de f
- dresser un tableau de variations complet
- justifier l'existence d'un extremum par un changement de signe

- mettre un problème d'optimisation en équation
- vérifier la validité d'une solution dans son intervalle

On nous pose souvent ces questions

Que dit le signe de la dérivée ?

Une dérivée positive sur un intervalle signifie que la fonction y est croissante, une dérivée négative qu'elle y est décroissante.

Une dérivée qui s'annule donne-t-elle toujours un extremum ?

Non. Il faut qu'elle change de signe. Pour la fonction cube, la dérivée s'annule en zéro sans changer de signe, et il n'y a pas d'extremum.

Comment aborder un problème d'optimisation ?

On exprime la quantité à optimiser en fonction d'une variable, on précise l'intervalle d'étude, puis on dérive et on étudie le signe de la dérivée.