

Géométrie repérée : droites et cercles

Une équation cartésienne de droite se lit directement : les coefficients a et b donnent un **vecteur normal**, et l'orthogonalité devient un simple produit scalaire nul.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. La droite $ax+by+c=0$ admet $\vec{n}(a;b)$ comme vecteur normal et $\vec{u}(-b;a)$ comme vecteur directeur.
2. Le cercle de centre $O(a;b)$ et de rayon R a pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
3. Une tangente au cercle est perpendiculaire au rayon au point de contact.

Droites

RÈGLE — VECTEURS DIRECTEUR ET NORMAL

La droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a ; b)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}(-b ; a)$.

COMMENT FAIRE — ÉQUATION AVEC UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Si $\vec{n}(a ; b)$ est normal et $A(x_A ; y_A)$ appartient à la droite, alors $M(x ; y)$ est sur la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$.

EXEMPLE GUIDÉ

Droite passant par $A(2 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3 ; -4)$: $3(x-2)-4(y-1)=0$, soit $3x-4y-2=0$.

RÈGLE — PERPENDICULARITÉ

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire si $aa'+bb'=0$.

Cercles

RÈGLE — ÉQUATION

Cercle de centre $O(a ; b)$ et de rayon R : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

COMMENT FAIRE — RECONNAÎTRE UN CERCLE SOUS FORME DÉVELOPPÉE

On regroupe les termes en x et en y , puis on complète chaque carré.

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$ devient $(x-2)^2-4+(y+3)^2-9-3=0$, soit $(x-2)^2+(y+3)^2=16$: centre $(2 ; -3)$, rayon 4.

PIÈGE À ÉVITER

Attention au signe : $(y+3)^2$ correspond à une ordonnée de centre égale à -3 , et non $+3$.

RÈGLE — CERCLE DE DIAMÈTRE $[AB]$

M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Positions relatives

COMMENT FAIRE — DROITE ET CERCLE

On compare la distance du centre à la droite avec le rayon : plus grande, aucun point commun ; égale, tangence ; plus petite, deux points d'intersection. On peut aussi substituer et étudier le discriminant.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- identifier vecteur directeur et vecteur normal d'une droite
- déterminer une équation cartésienne à partir d'un vecteur normal
- démontrer que deux droites sont perpendiculaires
- reconnaître l'équation d'un cercle et en lire centre et rayon
- étudier la position d'une droite par rapport à un cercle

On nous pose souvent ces questions

Comment lire un vecteur normal dans l'équation d'une droite ?

Les coefficients de x et de y donnent directement les coordonnées d'un vecteur normal à la droite.

Comment reconnaître l'équation d'un cercle sous forme développée ?

On regroupe les termes en x et en y , puis on complète chaque carré pour retrouver la forme centre-rayon.

Comment savoir si une droite coupe un cercle ?

On compare la distance du centre à la droite avec le rayon : plus grande, aucun point commun ; égale, tangence ; plus petite, deux points d'intersection.