

Sommes de variables aléatoires et concentration

Répéter une expérience et faire la **moyenne** réduit la dispersion. C'est ce que quantifient les inégalités de concentration.

L'ESSENTIEL EN TROIS POINTS

1. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ toujours ; $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ seulement si X et Y sont indépendantes.
2. Pour la moyenne M_n de n variables identiques : $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.
3. Loi des grands nombres : M_n se concentre autour de μ quand n grandit.

Espérance et variance d'une somme

RÈGLE — LES RÈGLES

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, **sans condition**.

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ uniquement si X et Y sont **indépendantes**.

$E(aX) = aE(X)$ et $V(aX) = a^2V(X)$.

PIÈGE À ÉVITER

La linéarité de l'espérance ne demande aucune hypothèse, celle de la variance en demande une. C'est la distinction la plus souvent oubliée.

Échantillon et moyenne

RÈGLE — LES RÉSULTATS

Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 .

Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$.

$E(S_n) = n\mu$ et $V(S_n) = n\sigma^2$.

$E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

ASTUCE

Le point essentiel : la variance de la moyenne est divisée par n . Multiplier la taille de l'échantillon par 100 divise l'écart type par 10.

Les inégalités de concentration

RÈGLE — BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Pour tout $\delta > 0$: $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

RÈGLE — INÉGALITÉ DE CONCENTRATION

Appliquée à la moyenne : $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$.

EXEMPLE GUIDÉ

Avec $\sigma^2 = 4$ et $\delta = 0,5$, pour $n = 1000$: $P(|M_n - \mu| \geq 0,5) \leq \frac{4}{1000 \times 0,25} = 0,016$.

La loi des grands nombres

RÈGLE — ÉNONCÉ

Pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini : la moyenne d'un grand échantillon se rapproche de l'espérance.

ASTUCE

C'est la justification théorique des simulations : une fréquence observée sur un grand nombre de répétitions est une bonne estimation de la probabilité.

VÉRIFIEZ QUE VOUS SAVEZ FAIRE

- appliquer la linéarité de l'espérance
- savoir quand additionner les variances
- calculer espérance et variance d'une moyenne d'échantillon
- appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- interpréter la loi des grands nombres

On nous pose souvent ces questions

Peut-on toujours additionner les espérances ?

Oui, la linéarité de l'espérance ne demande aucune hypothèse. En revanche, additionner les variances exige que les variables soient indépendantes.

Que devient la variance d'une moyenne d'échantillon ?

Elle est divisée par la taille de l'échantillon. Multiplier cette taille par cent divise donc l'écart type par dix.

Que dit la loi des grands nombres ?

Que la moyenne d'un grand échantillon se rapproche de l'espérance. C'est ce qui justifie d'estimer une probabilité par une fréquence observée.