

Exercice 21 : introduire une suite auxiliaire

Introduire une suite auxiliaire

u est la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^2}{e^n}$.

On se propose d'étudier la limite de la suite u .

Pour cela, on introduit la suite v définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = nu_n.$$

a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{e}.$$

b) Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$.

c) En déduire que, pour tout $n \geq 3$, $v_n \leq v_3$.

d) Déterminer alors la limite de la suite u .