



### Exercice 18 : annale sur les suites numériques.

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ .

1. a) Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ . On pourra en donner des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq n + 3$ .

b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ .

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - n$ .

a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ .

b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ .

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

4. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ .