Bac S de maths 2019

Exercice 19 : suites récurrentes.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a) Calculer v_0.

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a) Calculer w_0.

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.