Bac de maths 2025

Exercice 11 : fonctions exponentielles et limites

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$.

On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est donnée en annexe.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f'_1(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

Donner une interprétation graphique de I.