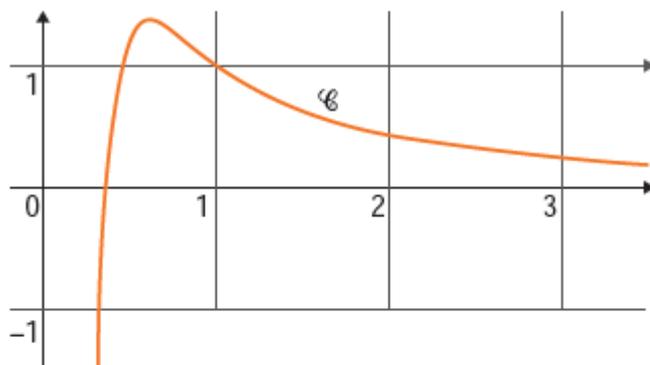


## Exercice 13 : une étude de limite et variations d'une fonction

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$  et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan. La courbe  $\mathcal{C}$  est donnée ci-dessous :



**1. a)** Étudier la limite de  $f$  en  $0$ .

**b)** Que vaut  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$  ? En déduire la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

**c)** En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe  $\mathcal{C}$ .

**2. a)** On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

Démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}.$$

**b)** Résoudre sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  l'inéquation  $-1 - 2\ln x > 0$ .

En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

**c)** Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

**3. a)** Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

**b)** En déduire le signe de  $f(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .