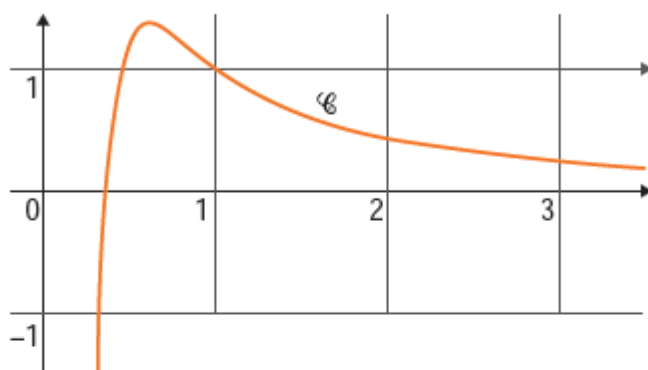


Exercice : une étude de limite et variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a) Étudier la limite de f en 0 .

b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}.$$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln x > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3. a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.