

**Exercice 14 : intégrale d'une fonction et exponentielle**

---

On considère la suite  $u_n$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx$ .

**1. a)** Montrer que  $u_0 + u_1 = 1$ .

**b)** Calculer  $u_1$ . En déduire  $u_0$ .

**2.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .

**3. a)** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

**b)** En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

**4.** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .