

Exercice : intégrale d'une fonction et exponentielle

On considère la suite u_n définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx$.

1. a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Calculer u_1 . En déduire u_0 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .