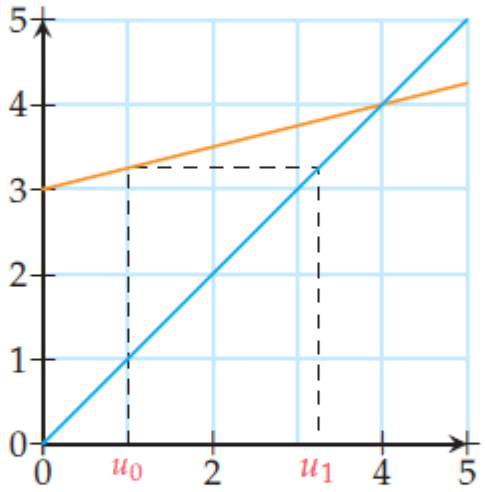
Niveau : terminale

Raisonnement par récurrence et suites

Exercice 17 : fonctions et récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous avec la droite d'équation $y = x$:



1) Reproduire la figure et y construire sans calcul les points d'abscisses u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2) a) Entre quels entiers consécutifs peut-on conjecturer que tous les termes de la suite sont compris à partir du rang 1 ?
   b) Démontrer cette conjecture.