Logarithme népérien

Exercice 34 : suite géométrique et logarithme népérien

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n et u_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \ln(v_n)$.
   a) Montrer que la suite (w_n) est bien définie.
   b) Montrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n.