

**Exercice 19 : démontrer la dérivée nième d'une fonction**

---

On note  $f^{(0)} : x \mapsto \cos x$  la fonction cosinus,  $f^{(1)}$  la dérivée de  $f^{(0)}$ ,  $f^{(2)}$  la dérivée de  $f^{(1)}$ ,  $f^{(3)}$  la dérivée de  $f^{(2)}$ , etc. On nomme  $f^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .

1) a) Calculer  $f^{(1)}(x) = f'(x)$ ,  $f^{(2)}(x) = f''(x)$  et  $f^{(3)}(x)$ .

b) Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

2) Prouver la formule analogue pour la fonction sinus.