Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 8 : achat de pain et événement

Chaque jour Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

- S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là).
- S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'évènement « Bill achète du pain le n^e jour » et on note $p_n = P(A_n)$.

Aujourd'hui (le 1^{er} jour), Bill a acheté du pain, ainsi $p_1 = 1$.

1) Calculer p_2 et p_3.
2) Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent les évènements A_n, $\overline{A_n}$, A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$.
3) Montrer que $p_{n+1} = 0{,}8 - 0{,}5p_n$.
4) Montrer que $p_n = \frac{7}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5) a) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
   b) Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.