

## Probabilités conditionnelles et indépendance

**Exercice 8 : achat de pain et événement**

Chaque jour Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

- S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là).
- S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle  $A_n$  l'évènement « Bill achète du pain le  $n^{\text{e}}$  jour » et on note  $p_n = P(A_n)$ .

Aujourd'hui (le 1<sup>er</sup> jour), Bill a acheté du pain, ainsi  $p_1 = 1$ .

- 1) Calculer  $p_2$  et  $p_3$ .
- 2) Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent les évènements  $A_n$ ,  $\overline{A_n}$ ,  $A_{n+1}$  et  $\overline{A_{n+1}}$ .
- 3) Montrer que  $p_{n+1} = 0,8 - 0,5p_n$ .
- 4) Montrer que  $p_n = \frac{7}{15} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{8}{15}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5) a) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .  
b) Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.