

Exercice 8 : résoudre ce système avec z comme paramètre

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs non nuls et non colinéaires

$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On cherche les coordonnées

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'un vecteur \vec{n} , orthogonal à \vec{u} et \vec{v} .

1) Démontrer que x , y et z satisfont le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

2) Résoudre ce système en prenant z comme paramètre, c'est-à-dire en exprimant x et y en fonction de z .

3) En déduire, en choisissant judicieusement une valeur de z , que $\vec{n} \begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$ est une solution du problème posé.

On dit que ce \vec{n} est le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} (dans cet ordre) et on note $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

4) Calculer $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Que remarque-t-on ?