Niveau : terminale

Produit scalaire dans l'espace

Exercice 8 : résoudre ce système avec z comme paramètre

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{n}$, orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1) Démontrer que x, y et z satisfont le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

2) Résoudre ce système en prenant z comme paramètre, c'est-à-dire en exprimant x et y en fonction de z.

3) En déduire, en choisissant judicieusement une valeur de z, que $\vec{n}\begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$ est une solution du problème posé.

> On dit que ce $\vec{n}$ est le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) et on note $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

4) Calculer $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Que remarque-t-on ?