Niveau : terminale

Bac de maths 2025

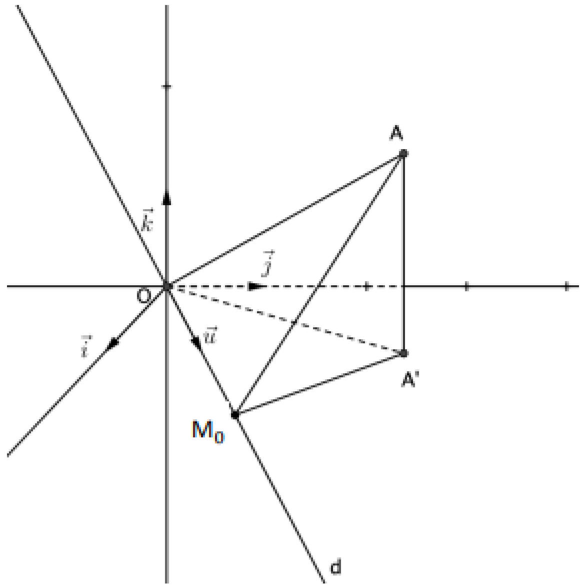
Exercice : représentation paramétrique et volume

Principaux domaines abordés :

Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;t\,;0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$\mathrm{AM}^2 = 2t^2 - 8t + 14\,.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;2\,;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.