

Exercice : logarithme népérien et fonctions

Principaux domaines abordés :**Fonction logarithme ; dérivation.****Partie I**

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0; +\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.

Partie II

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha; \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.