

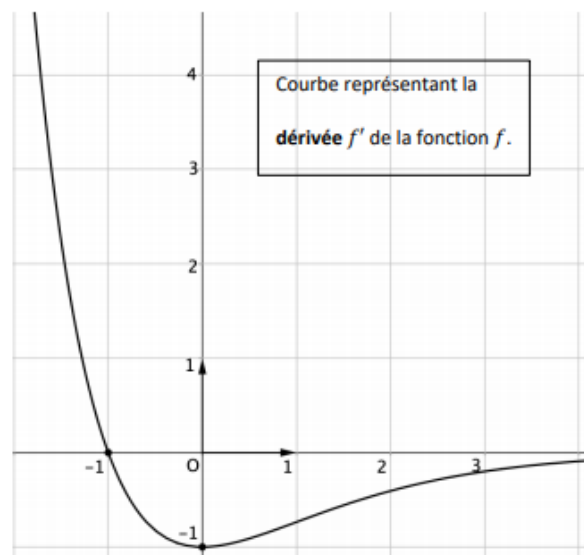
Exercice : convexité et étude d'une fonction

PARTIE I

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



PARTIE II

On admet que la fonction f mentionnée dans la **Partie I** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2.

- a. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
 - b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x , l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la

