Fonction inverse

Exercice 30 : fonction impaire et rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

a. Étudier le signe de $1-f(x)$ pour tout réel x.

b. Étudier le signe de $1+f(x)$ pour tout réel x.

3. En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$ est située entre les deux droites d'équation $y=1$ et $y=-1$.
4. Dans le repère précédent tracer la portion $\mathscr{C}'$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont les points ont une abscisse comprise entre -3 et 3.
5. Soit D la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

a. Déterminer graphiquement les coordonnées du point A d'intersection de D et de $\mathscr{C}'$. On pourra s'aider d'une calculatrice.

b. Montrer que $x^2-4x+1=(x-2)^2-3$.

c. En déduire les coordonnées exactes de A.

6.a. Résoudre dans $[-3;3]$ l'inéquation $f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$.

b. Sur quel intervalle contenu dans $[-3;3]$ la courbe $\mathscr{C}'$ est-elle au-dessous de D ?