

Exercice 21 : le pivot de Gauss

Le pivot de Gauss

Considérons le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y - 2z = 2 & (L_1) \\ 2x + 4y - 6z = 2 & (L_2) \\ 3x + 8y - 8z = 10 & (L_3) \end{cases}$$

Voici une méthode de résolution appelée « pivot de Gauss ».

Étape ①. On conserve (L_1) qui sert de « pivot » pour éliminer x dans (L_2) et (L_3) par combinaison linéaire.

$$(S) \text{ équivaut à } \begin{cases} x + y - 2z = 2 & (L_1) \\ y - z = -1 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 2(L_1) \\ 5y - 2z = 4 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 3(L_1) \end{cases}$$

Étape ②. (L_1) reste inchangée. (L_2) sert de « pivot » pour éliminer y dans (L_3) .

$$(S) \text{ équivaut à } \begin{cases} x + y - 2z = 2 & (L_1) \\ y - z = -1 & (L_2) \\ 3z = 9 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_2) \end{cases}$$

Étape ③. On résout (L_3) , puis on résout le système.

$$(S) \text{ équivaut à } \begin{cases} x + y - 2z = 2 & (L_1) \\ y - 3 = -1 & (L_2) \\ z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} x + 2 - 2 \times 3 = 2 & (L_1) \\ y = 2 & (L_2) \\ z = 3 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 & (L_1) \\ y = 2 & (L_2) \\ z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Finalement l'ensemble solution est $S = \{(6; 2; 3)\}$.

$$\text{Résoudre le système : } (S_1) \begin{cases} x - y + 3z = 13 \\ -x + 3y + 2z = -22 \\ 3x + y + 8z = 20 \end{cases}$$