

Exercice 31 : la suite de Fibonacci et récurrence double

(F_n) est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a) Calculer F_2 et F_3 .

b) Démontrer par récurrence double que pour tout entier naturel n , $F_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}.$$