Arithmétique et décomposition en facteurs premiers

0.Introduction :

L'arithmétique est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux ensembles de nombres et aux différentes propriétés qui les relient.

Le sens étymologique du mot arithmétique est **<< arithmos>>** qui signifie **<<nombre>>**.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons essentiellement aux nombres entiers positifs.

I. Définitions et vocabulaire :

1.La division euclidienne :

Propriété :

> On considère a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.
>
> Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver l'unique couple d'entiers positifs $(q, r, ,)$
>
> tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Exemple :

Effectuer la division euclidienne de 84 par 15.

$84 = 5 \times 15 + 9$ avec 0<9<15

2. Notion de diviseur et de multiple :

Définition :

On considère deux nombres entiers positifs a et b tels que $a > b$ et $b \neq 0$.On dit que **a est un multiple de b** si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

L'égalité euclidienne devient $a = bq + 0 = bq$.

Si c'est le cas, on dit que **b est un diviseur de a** ou encore que **b divise a**.

Exemples :

$75 = 3 \times 25 + 0$ donc $75 = 3 \times 25$. Ainsi, 75 est un multiple de 25 et de 3.

$77 = 3 \times 25 + 2$ donc 77 n'est ni un multiple de 25, ni un multiple de 3.

Ou encore, les entiers 3 et 25 ne sont pas des diviseurs de 77.

Remarques :

- Tout nombre entier non nul possède une infinité de multiples et un nombre fini de diviseurs;
- Tout nombre entier non nul possède au moins deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemple :

Déterminer les diviseurs de 36.

$$\begin{aligned} 36 &= 36 \times 1 \\ &= 6 \times 6 \times 1 \\ &= 3 \times 2 \times 6 \times 1 \\ &= 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 9 \times 2 \times 2 \times 1 \\ &= 9 \times 4 \times 1 \\ &= 12 \times 3 \times 1 \\ &= 18 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

Les diviseurs de 36 sont $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$.

3.Les critères de divisibilité :

Propriété :

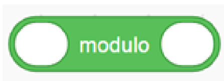
Un nombre entier est divisible par :

- 2 s' il se termine par 0,2,4,6 ou 8;
- 3 si la somme de ses chiffres est un nombre divisible par 3;
- 4 si le nombre composé de sa dizaine et de son unité est divisible par 4;
- 5 s'il se termine par 0 ou 5;
- 9 si la somme de ses chiffres est un nombre divisible par 9.

Exemples :

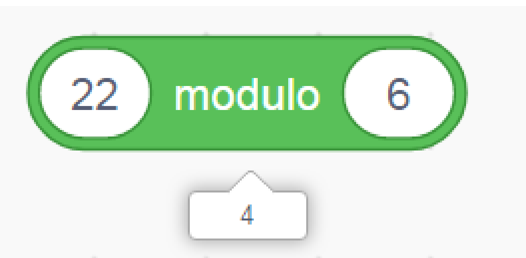
- 1 348 est divisible par 2 car il se termine par 8;
- 1623 est divisible par 3 car $1+6+2+3=12$ et 12 est divisible par 3 car $12=4\times\ 3$;
- 78 924 est divisible par 4 car 24 est divisible par 4 $(24=6\times\ 4,)$;
- 154 395 est divisible par 5 car il se termine par 5;
- 756 est divisible par 9 car $7+5+6=18$ et 18 est divisible par 9 car $18=9\ \times\ 2$.

Remarque :

Avec le logiciel de programmation scratch, la brique 

nous fournit le **reste de la division euclidienne**.

Exemple :



Le reste de la division euclidienne de 22 par 6 est 4 puisque $22 = 3 \times\ 6 + 4$.

II. Les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers :

1.Définition :

> Un nombre entier supérieur à 1 est un **nombre premier** si et seulement si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Remarques :

- les nombres premiers sont 2,3,5,7,11,13,17,19,23,....;
- L'ensemble des nombres premiers est infini;
- Un nombre premier possède exactement deux diviseurs.

2.La décomposition en facteurs premiers :

Propriété :

> Tout nombre entier n supérieur à 1 peut s'écrire, de manière **unique,** sous la forme d'un **produit de nombre premiers**.
>
> Nous pouvons écrire n sous la forme $n = p_1^{a_1} \times\ p_2^{a_2} \times\ p_3^{a_3} \times , ...p_k^{a_k}$ où les nombres $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ sont des nombres premiers et $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ sont des nombres entiers.
>
> Cette écriture est appelée **<<la décomposition en facteurs premiers>>** de l'entier n.

Exemples :

$12 = 56 \times\ 2 = 8\ \times\ 7 \times\ 2 = 2^3 \times\ 7\ \times\ 2 = 2^4\ \times\ 7$ est la décomposition en facteurs premiers de 112.

$825 = 3 \times\ 275 = 3 \times\ 5 \times\ 55 = 3 \times\ 5 \times\ 5 \times\ 11 = 3 \times\ 5^2 \times\ 11$ est la décomposition en facteurs premiers de 825.

Remarque :

La décomposition en facteurs premiers, nous permet de déterminer le **plus grand commun diviseur (PGCD)** de deux entiers.

Exemple :

Déterminer le pgcd(756,441)

Les décompositions en facteurs premiers de ces deux entiers sont :

$441 = 3^2 \times\ 7^2$ et $756 = 2^2 \times\ 3^3 \times\ 7$

Le plus grand commun diviseur est $3^2 \times\ 7 = 9 \times\ 7 = 63$ ainsi, $pgcd(756, 441) = 63$.

3.Les fractions irréductibles :

Définition :

Une fraction est irréductible lorsque le PGCD du numérateur et du dénominateur est 1.Soient a et b deux entiers tels que $b \neq\ 0$.

La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si et seulement si $pgcd(a, b) = 1$.

Propriété :

Soient c et d deux entiers tels que $d \neq\ 0$.La fraction $\frac{c \div\ pgcd(c, d)}{d \div\ pgcd(c, d)}$ est irréductible.

Exemple :

Rendre la fraction $\frac{441}{756}$ irréductible.

Nous avons vu précédemment que $pgcd(756, 441) = 63$.

$\dfrac{441}{756} = \dfrac{441 \div\ 63}{756 \div\ 63} = \dfrac{7}{12}$ avec $\dfrac{7}{12}$ qui est une fraction irréductible puisque $pgcd(7, 12) = 1$.