

Calcul d'intégrales

Ce qu'évalue le contrôle : calcul d'intégrales

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Calcul intégral (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive d'une fonction usuelle
- Utiliser la linéarité, la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale
- Mener une intégration par parties sur des exemples simples comme $x e^x$ ou $x \ln x$
- Encadrer une aire par comptage de carreaux, puis la calculer exactement en unités d'aire
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction et résoudre un problème concret d'aire

Avant de commencer

Avant chaque calcul, écris clairement la **primitive** choisie entre crochets, puis vérifie-la en la dérivant de tête. Pour une intégration par parties, pose d'abord u et v' en choisissant de dériver le facteur qui se simplifie, comme x ou $\ln x$. Ensuite, contrôle toujours ton résultat : une aire doit être positive et cohérente avec le **comptage des carreaux**. Enfin, garde les valeurs exactes jusqu'à la dernière ligne.

Le sujet du contrôle : calcul d'intégrales

Exercice 1 - Quatre intégrales directes (4 points)

Calcule la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes, puis donne une valeur approchée au centième lorsque le résultat n'est pas entier.

1. $I_1 = \int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx$ (1 point)

2. $I_2 = \int_1^e \frac{3}{x} dx$ (1 point)

3. $I_3 = \int_0^1 e^{2x} dx$ (1 point)

4. $I_4 = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$ (1 point)

Exercice 2 - Chasles, linéarité et comparaison (4 points)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0;3]$. On sait que $\int_0^3 f(x) dx = 5$, que $\int_0^1 f(x) dx = 2$

et que $\int_0^3 g(x) dx = -1$.

1. Calcule d'abord $\int_1^3 f(x)dx$ en justifiant. (1 point)

2. Déduis-en ensuite $\int_0^3 (2f(x)-3g(x))dx$. (1 point)

3. Que vaut $\int_3^0 f(x)dx$? (0,5 point)

4. Sans calculer l'intégrale, explique pourquoi $\int_1^3 \ln(x)dx \geq 0$. (0,5 point)

5. Montre que $x^3 \leq x^2$ pour tout x de $[0;1]$, puis compare $\int_0^1 x^3 dx$ et $\int_0^1 x^2 dx$ sans les calculer. (1 point)

Exercice 3 - Deux intégrations par parties (4 points)

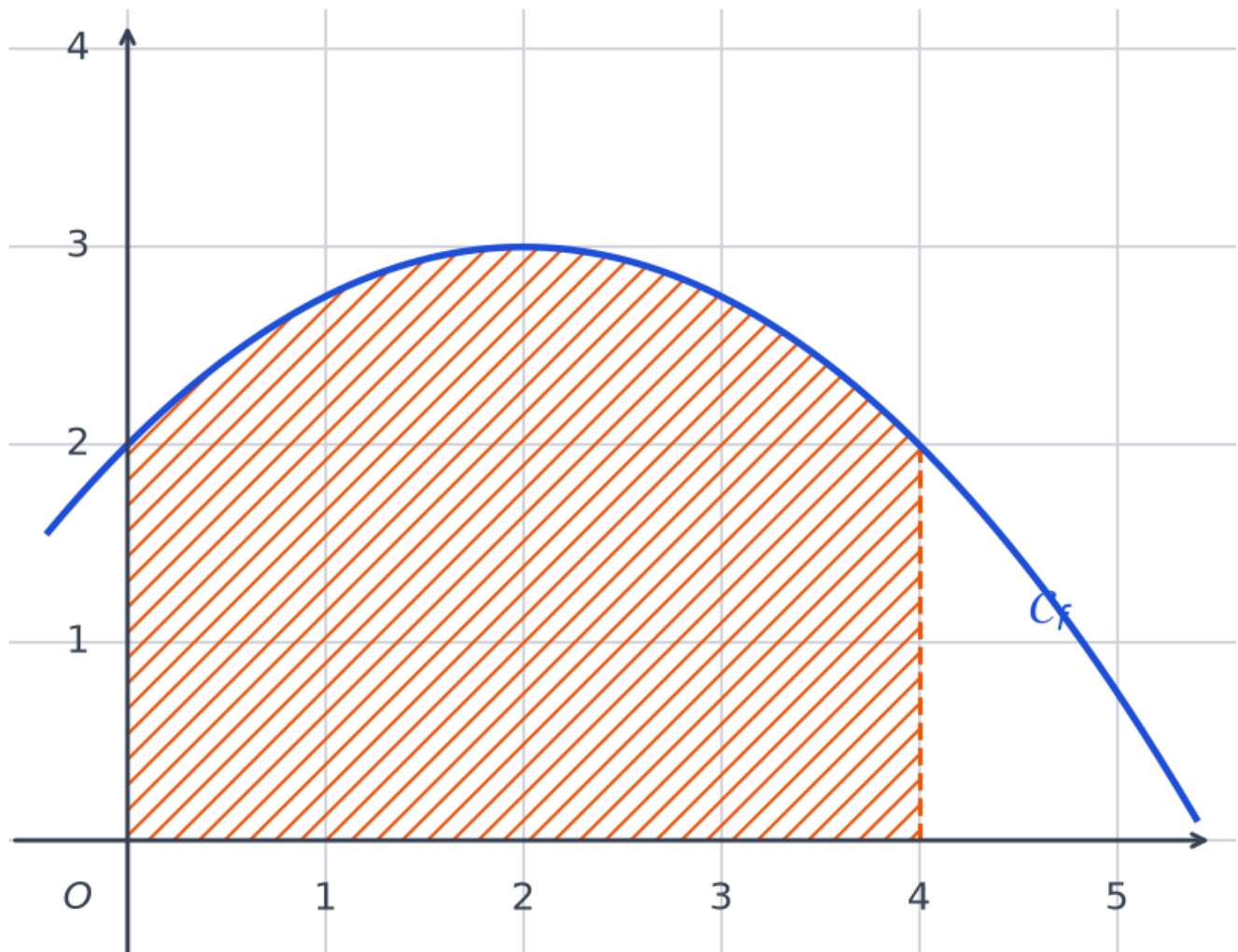
   l'aide d'une intégration par parties, calcule la valeur exacte des deux intégrales suivantes. Précise ainsi à chaque fois les fonctions u et v choisies.

1. $J = \int_0^1 xe^x dx$ (2 points)

2. $K = \int_1^e x \ln(x) dx$, puis donne une valeur approchée au centième. (2 points)

Exercice 4 - Une aire sur quadrillage (4 points)

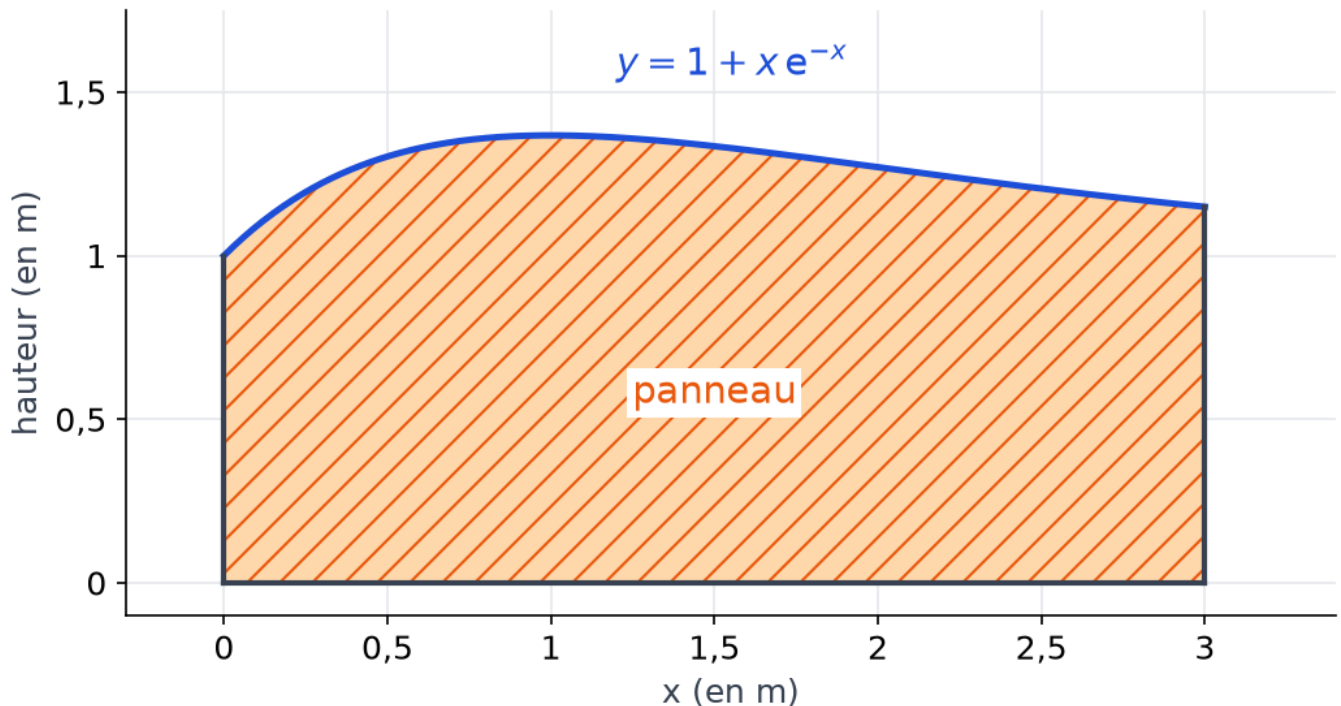
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 2$. Sa courbe est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé, où chaque carreau représente une unité d'aire. Le domaine hachuré est limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.



1. En comptant les carreaux, donne un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré par deux nombres entiers. (1 point)
2. Vérifie que $f(x) = 3 - \frac{(x-2)^2}{4}$, puis justifie que f est positive sur $[0;4]$. (0,5 point)
3. Calcule alors la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unités d'aire, puis vérifie qu'elle respecte ton encadrement. (1,5 point)
4. Détermine enfin la valeur moyenne de f sur $[0;4]$. (1 point)

Exercice 5 - Le panneau de la rampe (4 points)

Pour son club de skate, Nolwenn fabrique les deux panneaux latéraux d'une petite rampe. Chaque panneau a la forme du domaine hachuré ci-dessous : il est limité par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=3$, et la courbe de la fonction h définie par $h(x) = 1 + xe^{-x}$. L'unité est le mètre.



1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -(x+1)e^{-x}$. Montre que F est une primitive de $x \rightarrow xe^{-x}$. (1 point)
2. Déduis-en l'aire exacte d'un panneau en m^2 , puis sa valeur arrondie au centième. (1,5 point)
3. Nolwenn peint les deux faces de chacun des deux panneaux. Or un litre de peinture couvre 3 m^2 , et la peinture est vendue en pots de 0,5 litre. Combien de pots doit-elle acheter ? (1,5 point)



Réviser calcul d'intégrales avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon intégrale ; entraîne-toi sur la fiche les intégrales avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Intégrales et calcul d'aires : contrôle de maths en terminale
- Primitives et calcul intégral : contrôle de maths en terminale
- Primitives de fonctions usuelles : contrôle de maths en terminale