

Continuité et valeurs intermédiaires

Ce qu'évalue le contrôle : continuité et valeurs intermédiaires

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Limites de fonctions et continuité (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Lire sur une courbe si une fonction est continue en un point et justifier par une limite
- Déterminer un paramètre pour qu'une fonction définie par morceaux soit continue
- Appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires à partir d'un tableau de variations
- Encadrer une solution par dichotomie et compléter un algorithme en Python
- Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution dans un problème concret modélisé par une exponentielle

Avant de commencer

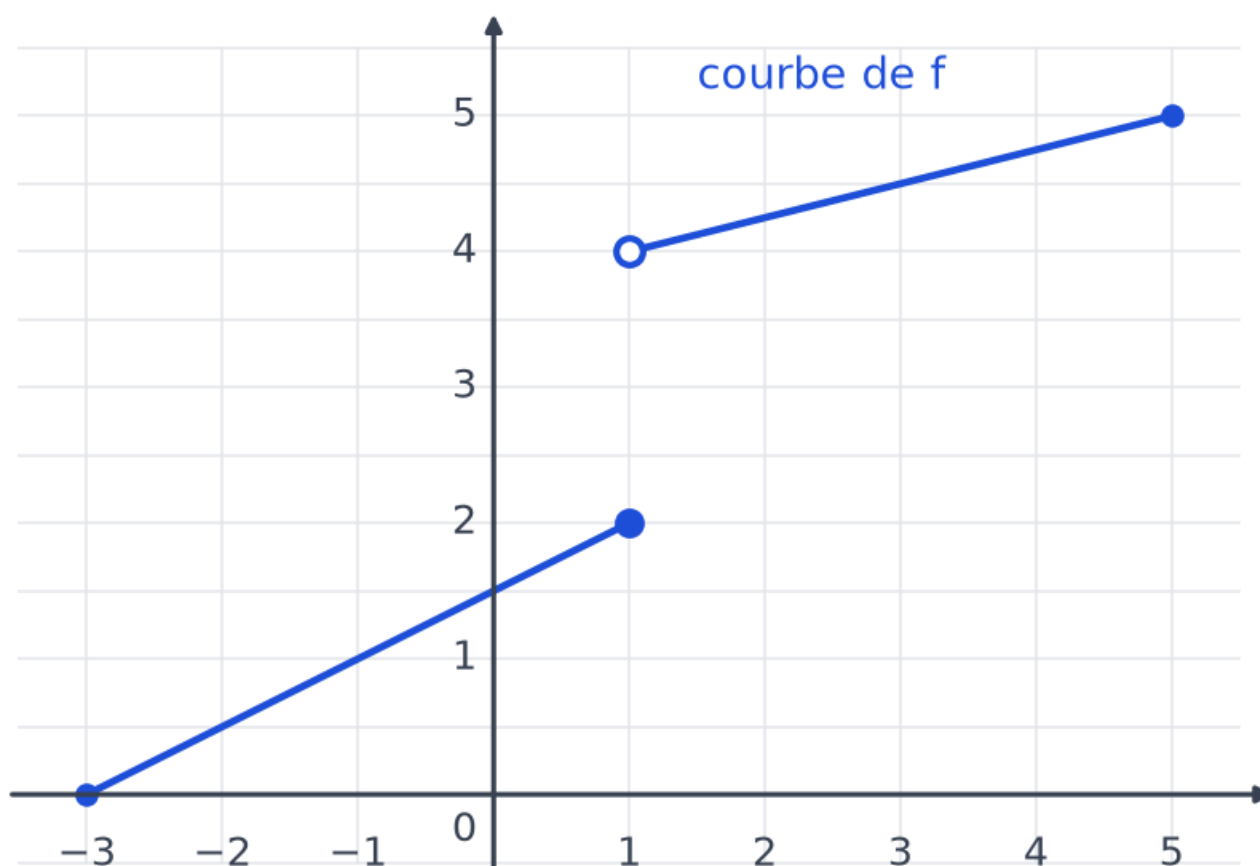
Pour appliquer le corollaire, cite toujours les **trois hypothèses** : la fonction est continue, elle

est strictement monotone sur l'intervalle, et la valeur cherchée est comprise entre les images des bornes (ou les limites). Quand le tableau comporte plusieurs flèches, travaille intervalle par intervalle, puis additionne les solutions. Pour l'algorithme, fais d'abord tourner deux ou trois boucles à la main, car c'est le meilleur moyen de vérifier la **condition du test**.

Le sujet du contrôle : continuité et valeurs intermédiaires

Exercice 1 - Une courbe en deux morceaux (3 points)

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $[-3;5]$. Un point plein appartient à la courbe, alors qu'un point creux n'y appartient pas.



1. Lis sur le graphique $f(-3)$, $f(1)$ et $f(5)$. (0,5 point)

2. Donne la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures. La fonction f est-elle continue en 1 ? Justifie. (1 point)
3. On a $f(-3)=0$ et $f(5)=5$, et pourtant l'équation $f(x)=3$ n'a pas de solution sur $[-3;5]$. Explique ce fait à l'aide du graphique, puis dis pourquoi il ne contredit pas le théorème des valeurs intermédiaires. (1,5 point)

Exercice 2 - Recoller deux expressions (3 points)

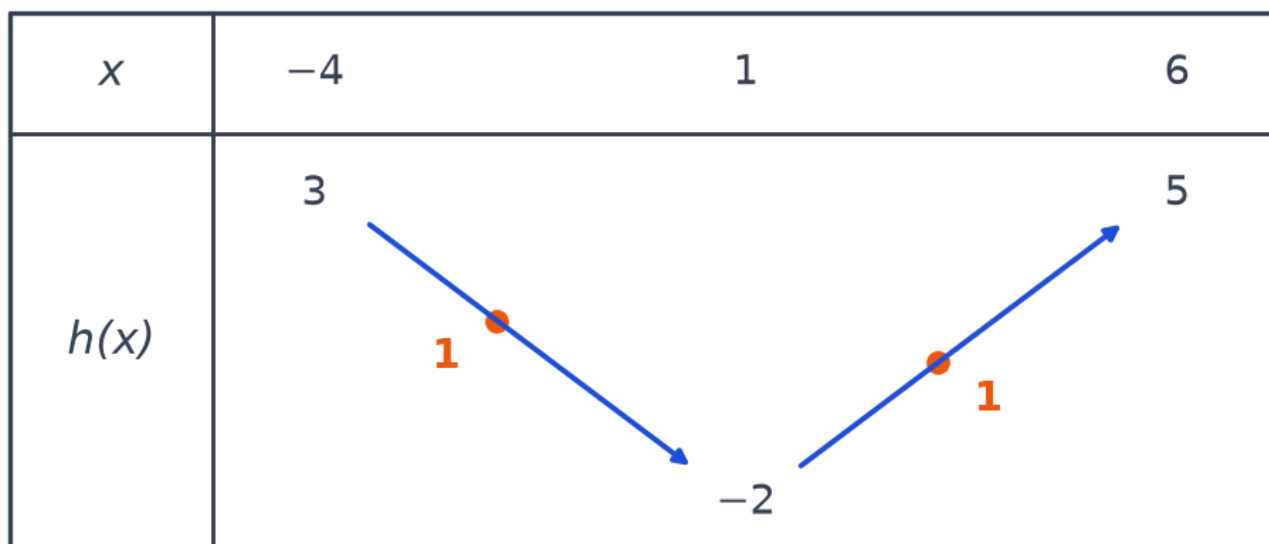
Soit a un nombre réel. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- pour $x \leq 0$, $g(x) = e^x + a$;
- pour $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 3x + 1$.

1. Calcule la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0 avec $x > 0$. (1 point)
2. Exprime $g(0)$ en fonction de a , puis détermine la valeur de a pour laquelle g est continue en 0. (1 point)
3. Avec cette valeur de a , justifie alors que g est continue sur $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 3 - Compter les solutions (4 points)

Une fonction h est continue sur $[-4;6]$ et strictement monotone sur chacun des intervalles $[-4;1]$ et $[1;6]$. Voici son tableau de variations, où la valeur 1 est repérée en orange sur chaque flèche.



1. Démontre que l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $[-4;6]$. (2 points)
2. Combien l'équation $h(x) = 4$ a-t-elle de solutions ? Justifie, car la réponse n'est pas la même que pour $h(x) = 1$. (1 point)
3. Donne ensuite le nombre de solutions de $h(x) = -3$, puis celui de $h(x) = -2$. (1 point)

Exercice 4 - Une équation résolue par dichotomie (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x - 3$.

1. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (1 point)
2. Calcule $f'(x)$, puis étudie le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. (1 point)
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, puis vérifie que $0 < \alpha < 1$. (1 point)

Pour encadrer α , on utilise la fonction Python ci-dessous. Elle renvoie deux nombres a et b tels que $a \leq \alpha \leq b$ et $b - a \leq p$. Cependant, deux lignes sont incomplètes.

```

1  from math import exp
2  def dichot(p):
3      a, b = 0, 1
4      while b - a > p:
5          m = (a + b) / 2
6          if ..... :
7              a = m
8          else:
9              .....
10     return a, b

```

4. Recopie et complète les lignes 6 et 9 de la fonction. (1 point)
5. Fais tourner l'algorithme à la main pour l'appel `dichot(0.1)` : donne les valeurs successives de `a` et de `b`, puis le résultat renvoyé. (1 point)

Exercice 5 - Le four de la céramiste (5 points)

Après une cuisson, Léna éteint son four à céramique. La température à l'intérieur du four, en degrés Celsius, t heures après l'extinction, est modélisée par $T(t) = 20 + 980e^{-0,2t}$ pour $t \geq 0$. Par sécurité, Léna n'ouvre le four que lorsque la température est descendue à 100 °C.

1. Calcule $T(0)$, puis interprète ce résultat. (0,5 point)
2. Calcule $T'(t)$ et déduis-en le sens de variation de T sur $[0; +\infty[$. (1 point)

3. Détermine la limite de T en $+\infty$, puis interprète-la dans le contexte. (1 point)
4. Démontre qu'il existe un unique instant $t_0 \geq 0$ tel que $T(t_0) = 100$. (1,5 point)
5. À l'aide de la calculatrice, donne un encadrement de t_0 d'amplitude 0,1. Au bout de combien de temps Léna pourra-t-elle ouvrir son four ? Donne la réponse en heures et minutes. (1 point)



Réviser continuité et valeurs intermédiaires avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon limites de suites et de fonctions et continuité ; entraîne-toi sur la fiche limites de fonctions et la continuité et fonction exponentielle avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Limites de fonctions et asymptotes : contrôle de maths en terminale
- Limites de suites et convergence : contrôle de maths en terminale
- Dérivée seconde et convexité : contrôle de maths en terminale