

Convexité et points d'inflexion

Ce qu'évalue le contrôle : convexité et points d'inflexion

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Dérivation et convexité (4 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Étudier la convexité d'une fonction à l'aide du signe de sa dérivée seconde
- Déterminer les coordonnées d'un point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point
- Positionner une courbe par rapport à ses tangentes grâce à la convexité
- Dédire la convexité d'une fonction de la courbe représentative de sa dérivée
- Interpréter un point d'inflexion comme le moment où une croissance ralentit

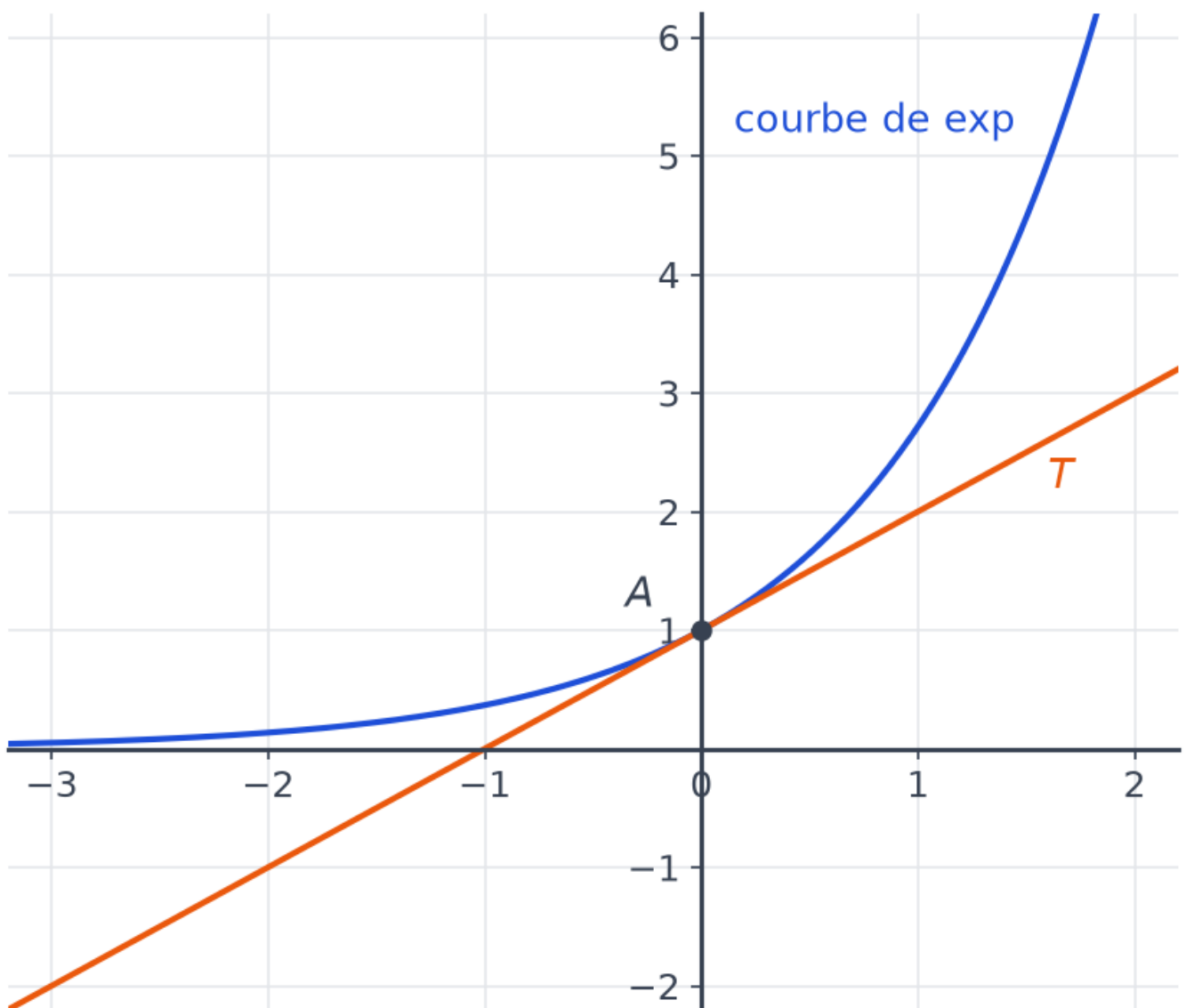
Avant de commencer

Avant chaque calcul de dérivée, repère la forme uv ou e^u et écris u , v et leurs dérivées. Ensuite, factorise toujours par l'exponentielle : son signe est connu, donc seul le **facteur affine** décide du signe. Sur un graphique de g' , ne confonds pas le **signe de g'** , qui donne les variations de g , et le **sens de variation de g'** , qui donne sa convexité. Enfin, vérifie chaque résultat numérique avec la calculatrice.

Le sujet du contrôle : convexité et points d'inflexion

Exercice 1 - L'exponentielle au-dessus de ses tangentes (4 points)

Le graphique montre la courbe de la fonction exponentielle et sa tangente T au point $A(0;1)$.

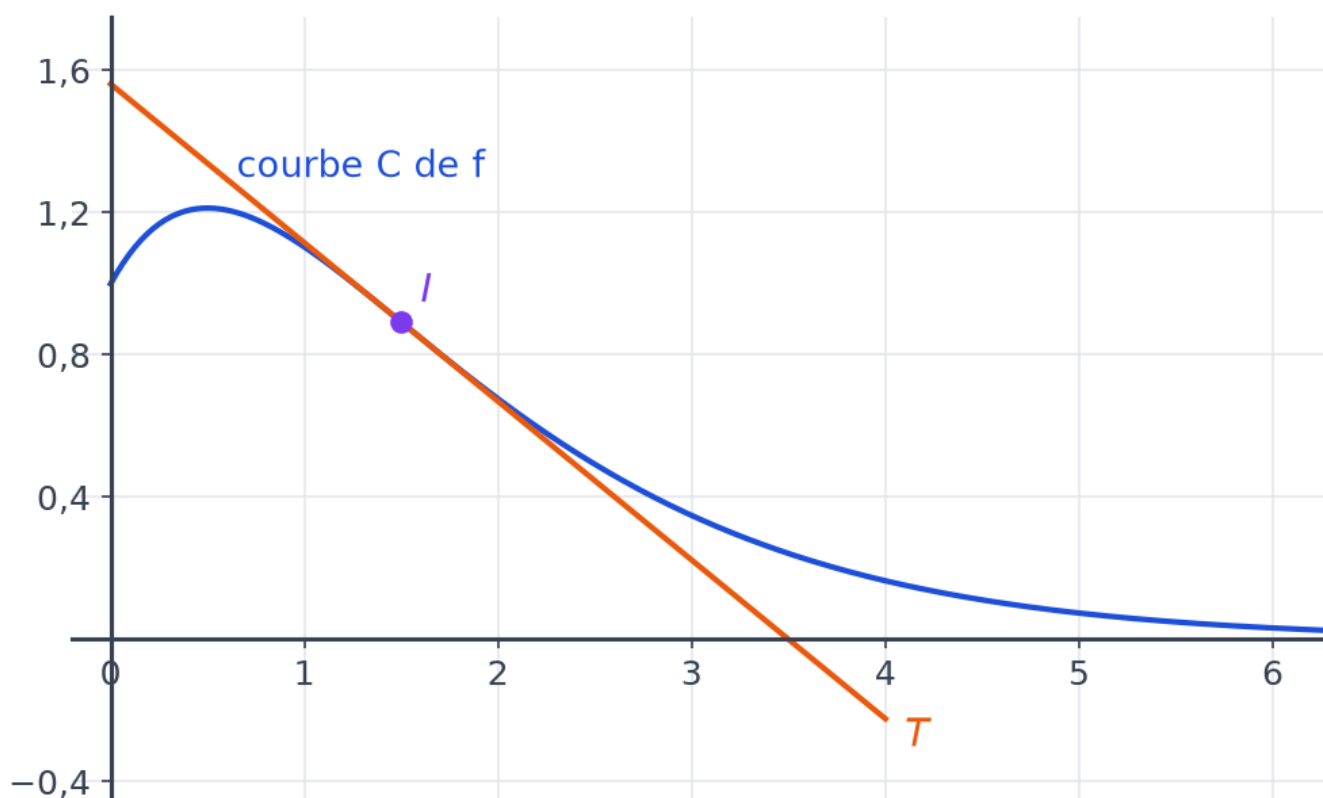


1. Justifie que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. (1 point)
2. Détermine une équation de la tangente T . (1 point)

- Déduis-en que, pour tout réel x , $e^x \geq x+1$. Applique ensuite ce résultat pour montrer que $e^{-0,5} \geq 0,5$. (1 point)
- Écris l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1, puis prouve que, pour tout réel x , $e^x \geq ex$. (1 point)

Exercice 2 - Étude complète d'une fonction (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$, et C sa courbe représentative. On admet que f est deux fois dérivable et que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. La figure montre C , son point d'inflexion I et la tangente T en ce point.



- Montre que, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = (1-2x)e^{-x}$. (1 point)
- Étudie le signe de $f'(x)$, puis dresse le tableau de variations de f avec la valeur exacte de son maximum. (1 point)
- Vérifie que $f''(x) = (2x-3)e^{-x}$. (1 point)
- Déduis-en les intervalles où f est convexe ou concave, puis les coordonnées exactes du

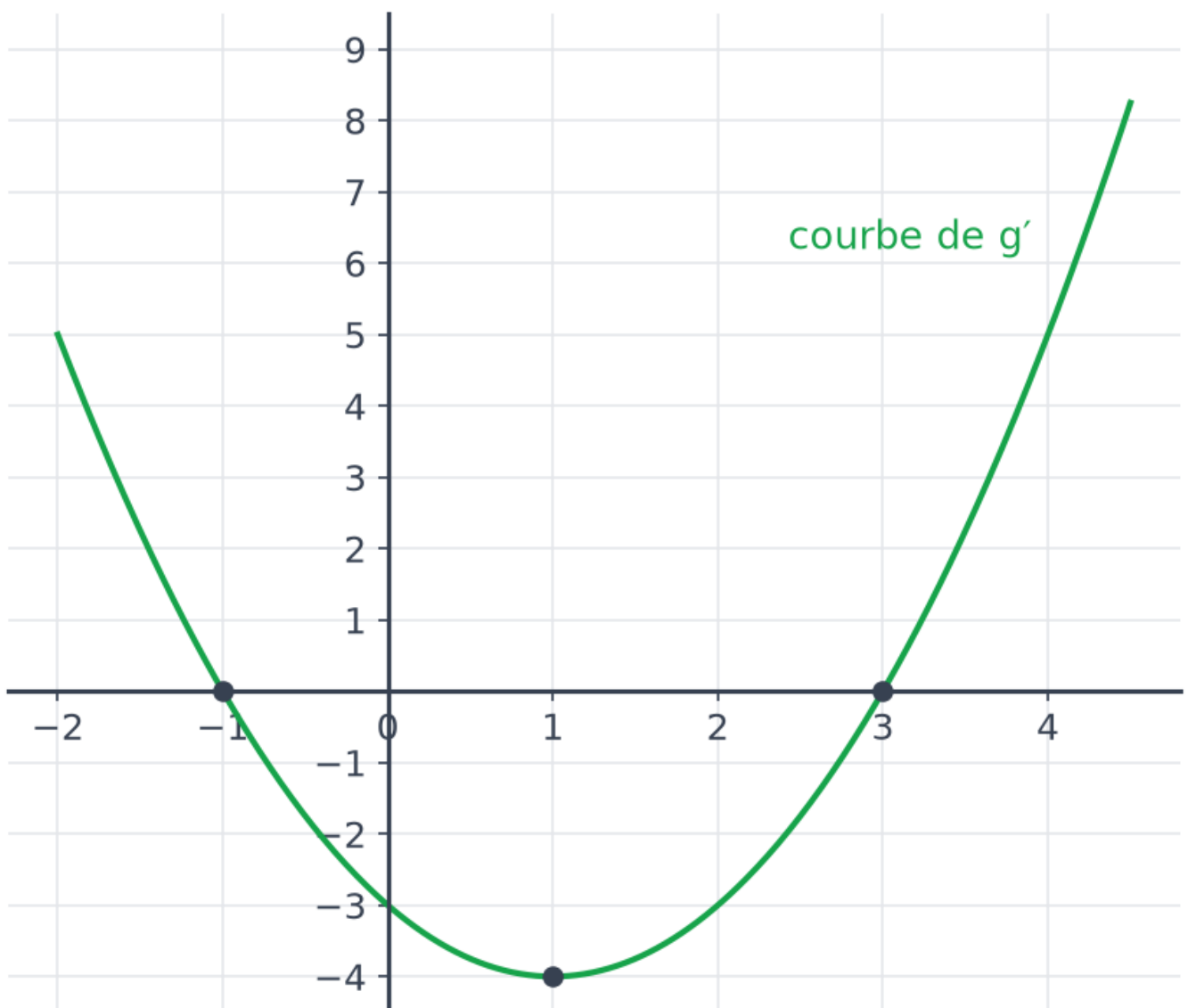
point d'inflexion I . (1 point)

5. Démontre qu'une équation de la tangente T en I est $y = e^{-1,5}(7-2x)$. (1 point)

6. Précise la position de C par rapport à T sur $[0;1,5]$, puis sur $[1,5;+\infty[$. Justifie sans calcul supplémentaire. (1 point)

Exercice 3 - Lire la convexité sur la courbe de g' (4 points)

Une fonction g est définie et deux fois dérivable sur $[-2;4,5]$. On ne connaît pas g , mais on dispose de la courbe de sa dérivée g' . Cette courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3 , et elle atteint son minimum au point $(1;-4)$.



1. Lis le signe de $g'(x)$, puis donne les variations de g sur $[-2;4,5]$. (1 point)
2. À partir du sens de variation de g' , trouve les intervalles où g est convexe et ceux où elle est concave. (1 point)
3. Quelle est l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de g ? Justifie ta réponse. (1 point)
4. Vrai ou faux : « La tangente à la courbe de g au point d'abscisse 3 est horizontale, et sur $[1;4,5]$ la courbe de g reste au-dessus de cette tangente. » Justifie. (1 point)

Exercice 4 - La rumeur qui se propage (6 points)

Dans une ville de 10 000 habitants, une rumeur circule sur la venue d'un chanteur. Ainsi, le nombre de personnes qui en ont entendu parler, en milliers, t jours après son lancement, est modélisé pour $t \geq 0$ par :

$$N(t) = 10 - (10 + 5t)e^{-0,5t}$$

Quand la vitesse de propagation $N'(t)$ est maximale, Élias, le journaliste local, veut publier un démenti.

1. Calcule $N(0)$ et interprète ce résultat. (0,5 point)
2. Montre que $N'(t) = 2,5te^{-0,5t}$, puis déduis-en le sens de variation de N sur $[0; +\infty[$. (1,5 point)
3. Prouve que $N''(t) = 1,25(2-t)e^{-0,5t}$, puis étudie la convexité de N . (1,5 point)
4. À quel instant la rumeur se propage-t-elle le plus vite? Donne alors cette vitesse maximale, en personnes par jour arrondie à l'unité, et le nombre de personnes informées. (1,5 point)
5. Explique ce que signifie le point d'inflexion pour Élias, et décris l'évolution de la rumeur après ce moment. (1 point)



Réviser convexité et points d'inflexion avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon fonctions convexe ou concave avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Dérivée seconde et convexité : contrôle de maths en terminale
- Continuité et valeurs intermédiaires : contrôle de maths en terminale
- Dénombrement et combinaisons : contrôle de maths en terminale