Dérivée d'une fonction

On considère, dans cette leçon, une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $C_f$sa courbe représentative.

I.Nombre dérivé et tangente à une courbe

Définition : accroissement moyen.

On considère deux réels distincts x_1 et x_2 appartenant à I.On appelle accroissement moyen de f entre x_1 et x_2 la quantité suivante :

$$\frac{\Delta, f}{\Delta, x}(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

En notant $x_1=a$ et $x_2=a+h$ avec h>0, on obtient :

$$\frac{\Delta, f}{\Delta, x}(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Définition : nombre dérivé.

Si, lorsque h se rapproche de zéro, $\frac{\Delta, f}{\Delta, x}(a)$ se rapproche d'un réel l, alors :On dit que la fonction f est dérivable en a.

Le réel l est appelé le nombre dérivé de f en a, que l'on note $f'(a)$.

On écrit alors :

$$\lim_{harrow,0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

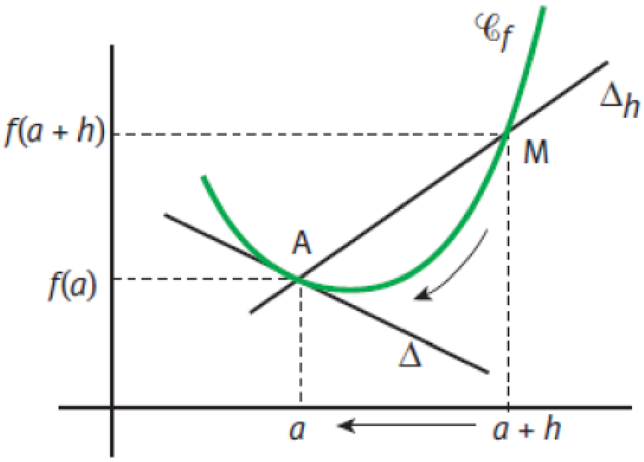
Définition : tangente à une courbe.

Soient A et M deux points distincts d'une courbe.Géométriquement, la tangente à la courbe au point A est la position limite de la sécante (AM)

lorsque M se rapproche de A

Propriété : coefficient directeur de la tangente.

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a.



Courbe C_f et sa tangente Δ au point d'abscisse a.

Propriété : équation réduite de la tangente.

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative C_f.L'équation réduite de la tangente à C_f en a est donnée par la formule suivante :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

II.La dérivée d'une fonction

Définition :

Si, pour tout réel $a \in, I, , f'(a)$ existe, on dit que f est dérivable en I.On définit alors, une nouvelle fonction f' sur I par $f' : x, \mapsto, f'(x)$.

Propriété : dérivées des fonctions usuelles.

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété : dérivée d'une somme ou produit.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I un intervalle de R et k un nombre réel.

- La fonction $u + v : x, \mapsto, u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u + v)' = u' + v'$.
- La fonction $ku : x, \mapsto, k\times , u(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = k\times , u'$.
- La fonction $uv : x, \mapsto, u(x)\times , v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u, v)' = u'v + uv'$.

Propriété : dérivée de l'inverse et d'un quotient.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I un intervalle de R telle que v ne s'annule pas sur I.

- La fonction $\frac{1}{u} : x, \mapsto, \frac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et on a $(, \frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$.
- La fonction $\frac{u}{v} : x, \mapsto, \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $(, \frac{u}{v})' =, \frac{u'v - uv'}{v^2}$.