

Dérivée seconde et convexité

Ce qu'évalue le contrôle : dérivée seconde et convexité

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **2 heures**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Dérivation et convexité (6 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Dériver des fonctions composées de la forme $\exp(u)$, racine de u et u puissance n
- Calculer une dérivée seconde et étudier son signe pour obtenir les intervalles de convexité
- Déterminer un point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point
- Dédire les variations et la convexité d'une fonction à partir de la courbe de sa dérivée
- Interpréter un point d'inflexion dans une situation concrète comme un moment de croissance maximale

Avant de commencer

Avant toute étude de convexité, écris proprement f' , puis dérive encore pour obtenir f'' sous une **forme factorisée** : son signe se lit alors directement. Dans l'exercice 4, fais attention, car la courbe donnée est celle de f' et non celle de f . Ainsi, le **signe de f'** donne les variations de f , tandis que ses variations donnent la convexité. Enfin, vérifie chaque point d'inflexion en

contrôlant que f'' change bien de signe.

Le sujet du contrôle : dérivée seconde et convexité

Exercice 1 - Dérivées de fonctions composées (4 points)

Calcule la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donne ensuite le résultat sous une forme simplifiée.

1. $f_1(x) = e^{3x^2-x}$ (1 point)
2. $f_2(x) = \sqrt{x^2+5}$ (1 point)
3. $f_3(x) = (2x-3)^5$ (1 point)
4. $f_4(x) = \frac{1}{x^2+1}$, que l'on pourra écrire $(x^2+1)^{-1}$ (1 point)

Exercice 2 - Un polynôme et son point d'inflexion (3,5 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Calcule $g'(x)$, puis $g''(x)$. (1 point)
2. Étudie le signe de $g''(x)$ et déduis-en les intervalles sur lesquels g est convexe ou concave. (1 point)
3. Justifie alors que $\mathcal{C}_g$ admet un point d'inflexion A , puis donne ses coordonnées. (0,5 point)

4. Détermine enfin une équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point A . (1 point)

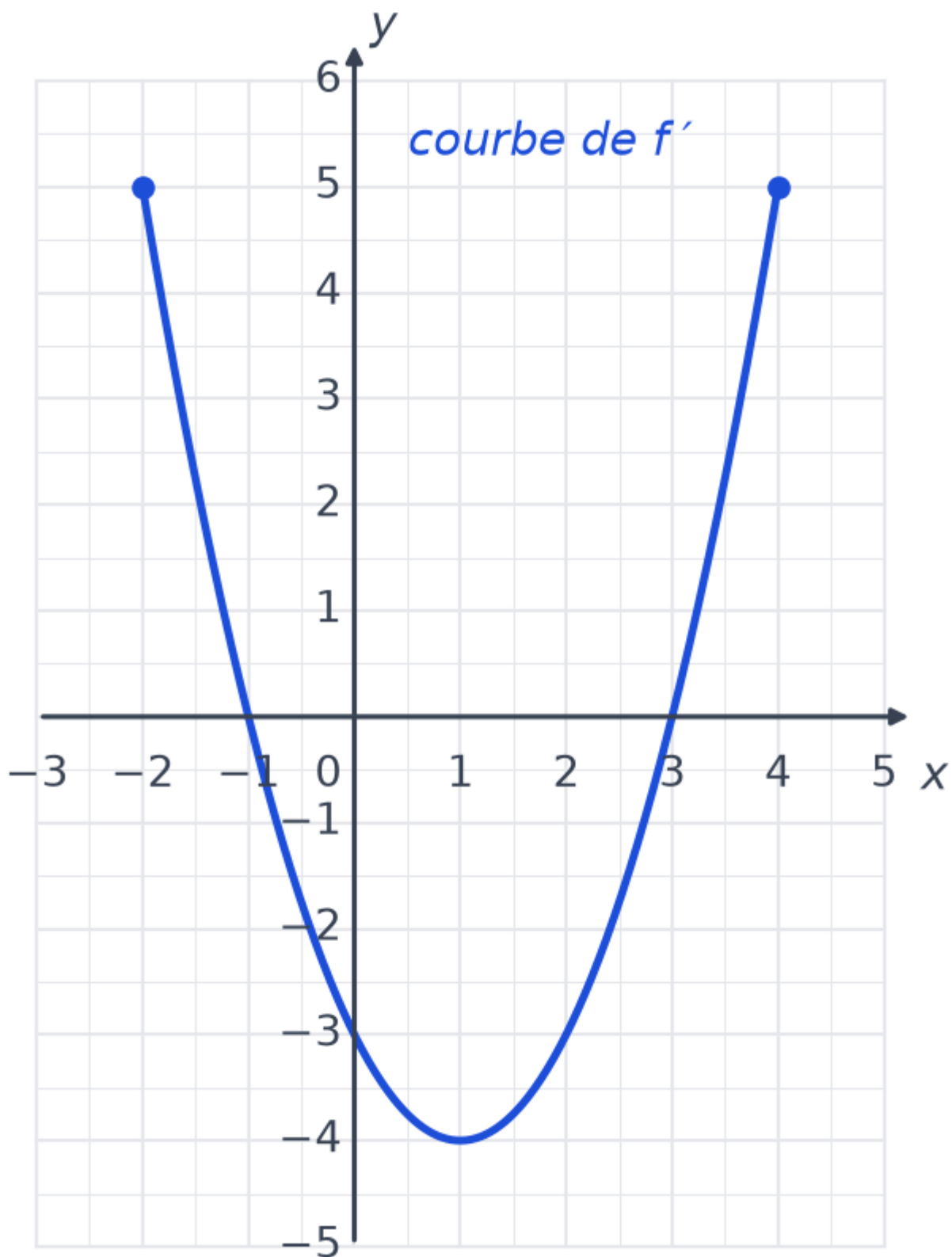
Exercice 3 - Une fonction avec exponentielle (4 points)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^{-x}$.

1. Montre que, pour tout réel x , $h'(x) = -xe^{-x}$. (1 point)
2. Démontre ensuite que $h''(x) = (x-1)e^{-x}$. (1 point)
3. Étudie la convexité de h sur $\mathbb{R}$, puis précise l'abscisse de son point d'inflexion. (1 point)
4. On note T la tangente à la courbe de h au point d'abscisse 1. Montre que T a pour équation $y = \frac{1}{3} - xe$. Dédus-en que, pour tout $x \geq 1$, $h(x) \geq \frac{1}{3} - xe$. (1 point)

Exercice 4 - Lire la courbe de la dérivée (3,5 points)

Une fonction f est définie et deux fois dérivable sur $[-2;4]$. Attention : on donne ci-dessous la courbe de sa **dérivée** f' , et non celle de f . Cette courbe est une parabole qui coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3 , et dont le sommet a pour coordonnées $(1; -4)$.

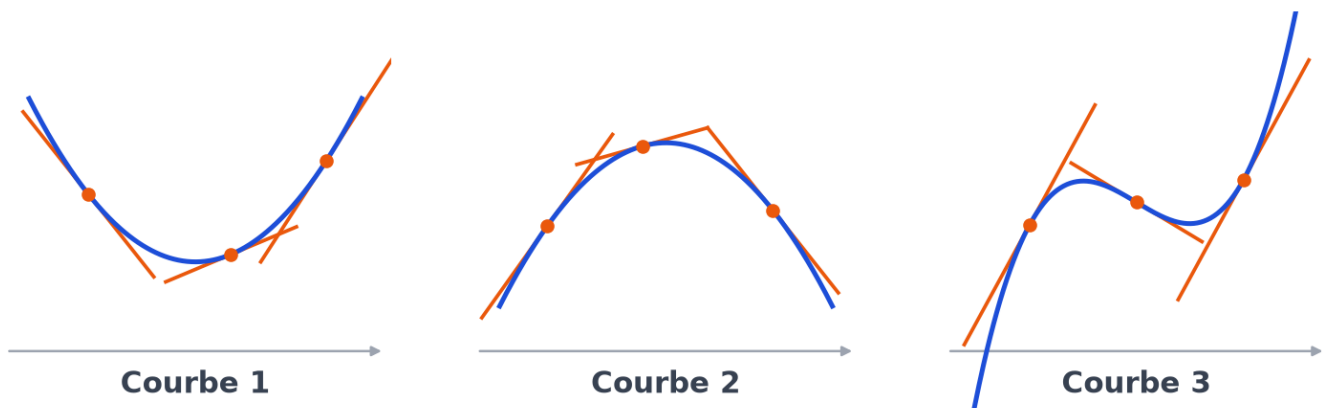


1. Donne le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x , puis dresse le tableau de variations de f sur $[-2;4]$. (1,5 point)
2. Déduis ensuite de la courbe les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave. Justifie ta réponse. (1 point)

3. Quelle est l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de f ? Donne aussi le coefficient directeur de la tangente en ce point. (1 point)

Exercice 5 - Convexe, concave ou inflexion ? (2 points)

Voici trois courbes, chacune tracée avec trois de ses tangentes en orange.



1. Pour chaque courbe, indique si la fonction représentée semble convexe, concave, ou si sa courbe présente un point d'inflexion. Justifie en observant la position des tangentes. (1,5 point)
2. Sur la courbe 3, que fait la tangente au point d'inflexion par rapport à la courbe ? (0,5 point)

Exercice 6 - Les ventes d'un jeu vidéo (3 points)

Un studio lance un nouveau jeu vidéo. Pendant les dix premières semaines, le nombre total d'exemplaires vendus, en milliers, est modélisé par $N(t) = -t^3 + 15t^2$, où t désigne le nombre de semaines écoulées depuis la sortie, avec $t \in [0;10]$. La vitesse de vente, en milliers d'exemplaires par semaine, est donnée par $N'(t)$.

1. Calcule $N'(t)$, puis $N''(t)$. Étudie ensuite la convexité de N sur $[0;10]$. (1 point)

2. Montre que la courbe de N admet un point d'inflexion, puis donne ses coordonnées. (1 point)
3. Explique pourquoi les ventes progressent le plus vite à cet instant. Quelle est alors la vitesse de vente ? (1 point)



Réviser dérivée seconde et convexité avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon fonctions convexe ou concave avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Convexité et points d'inflexion : contrôle de maths en terminale
- Limites de fonctions et asymptotes : contrôle de maths en terminale
- Continuité et valeurs intermédiaires : contrôle de maths en terminale