

Dérivées de sinus et cosinus

Ce qu'évalue le contrôle : dérivées de sinus et cosinus

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Fonctions sinus et cosinus (6 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Lire sur le cercle trigonométrique les valeurs exactes du cosinus et du sinus des angles remarquables
- Démontrer la parité et la périodicité d'une fonction trigonométrique
- Dériver des fonctions composées de la forme $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$, puis des produits et quotients
- Résoudre les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ sur un intervalle donné
- Étudier les variations d'un phénomène périodique modélisé par une fonction cosinus

Avant de commencer

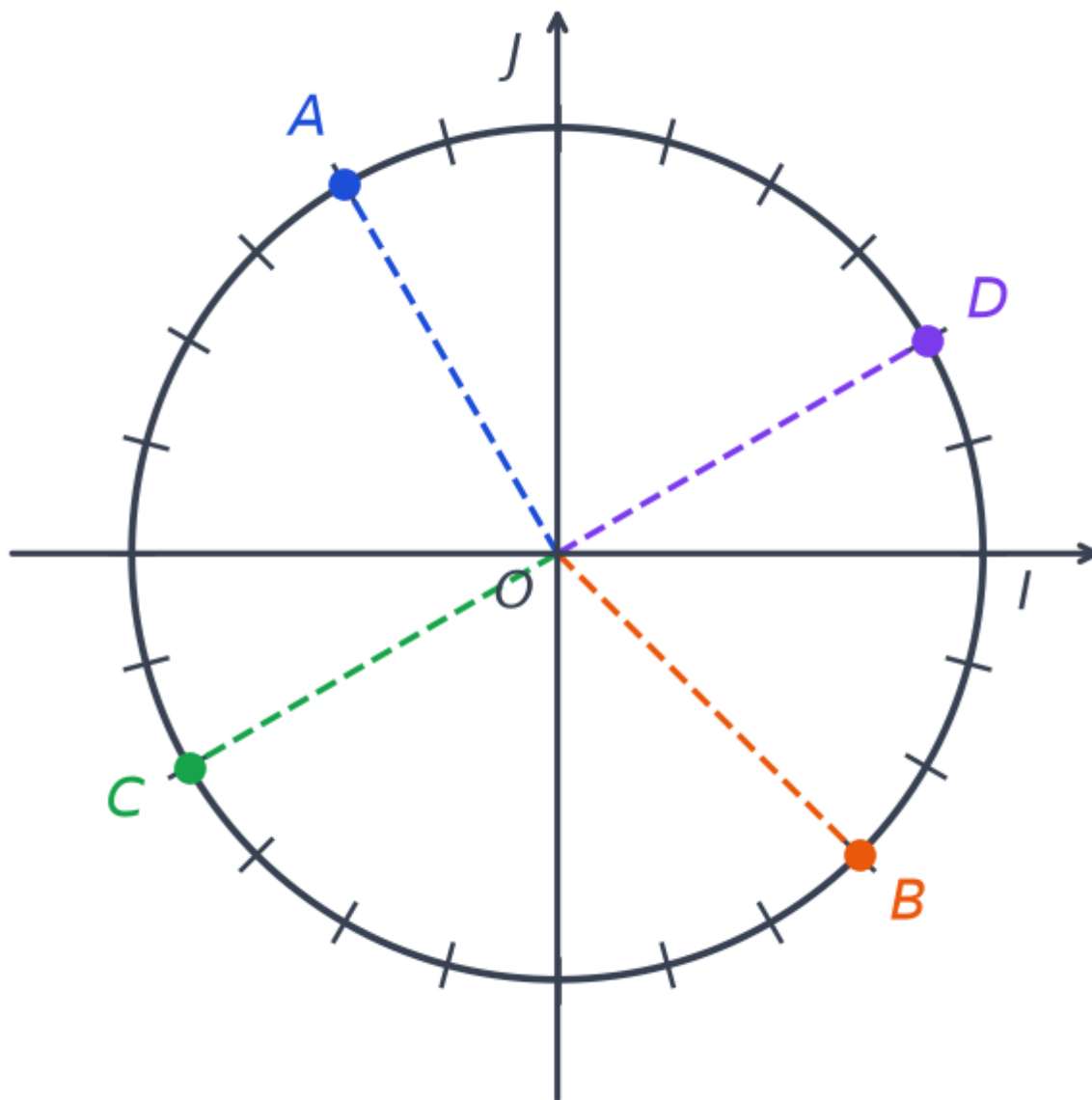
Commence par le cercle, car les valeurs remarquables servent ensuite partout. Pour une dérivée de $\cos(ax+b)$, n'oublie pas le facteur a ni le **signe moins**. Quand tu résous une équation, cherche d'abord les solutions sur un tour, puis ajoute ou retire 2π pour rester dans

l'**intervalle demandé**. Enfin, contrôle chaque solution sur les courbes fournies.

Le sujet du contrôle : dérivées de sinus et cosinus

Exercice 1 - Quatre points sur le cercle (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$. Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, les petites graduations sont placées tous les $\frac{\pi}{12}$ à partir du point I , et les points A , B , C et D sont situés sur des graduations.



1. Donne, pour chacun des points A , B , C et D , le réel de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ qui lui est associé. (1 point)
2. Déduis-en les valeurs exactes du cosinus et du sinus des réels associés aux points A et B . (1,5 point)
3. Quel point de la figure est associé au réel $\frac{25\pi}{6}$? Justifie, puis donne la valeur exacte de $\sin(\frac{25\pi}{6})$. (1 point)
4. Les points C et D sont symétriques par rapport à O . Utilise cette remarque afin d'obtenir $\cos(-\frac{5\pi}{6})$ et $\sin(-\frac{5\pi}{6})$. (0,5 point)

Exercice 2 - Parité et période (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(3x)$, ainsi que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Montre tout d'abord que la fonction f est paire. (0,5 point)
2. Démontre ensuite que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. (1 point)
3. La fonction g est-elle paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre ? Justifie. (1 point)
4. On connaît la courbe de f sur $[0; \frac{\pi}{3}]$. Explique alors comment obtenir toute la courbe de f sur $\mathbb{R}$. (0,5 point)

Exercice 3 - Une série de dérivées (4 points)

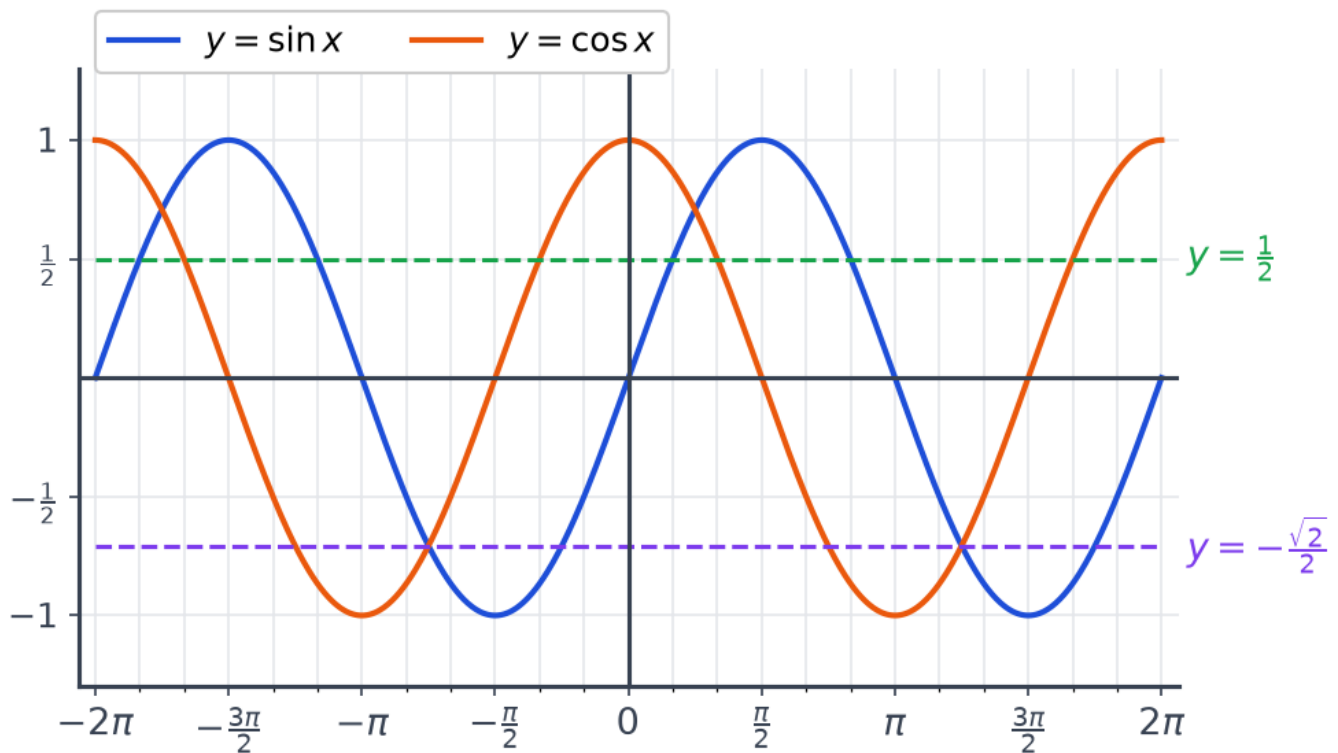
Les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Calcule leur fonction dérivée, puis simplifie le résultat quand c'est possible.

1. $f_1(x) = 3\sin x - 2\cos x$ (0,5 point)
2. $f_2(x) = \cos(4x - \frac{\pi}{3})$ (1 point)
3. $f_3(x) = x^2 \sin x$ (1 point)
4. $f_4(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$: justifie d'abord que le dénominateur ne s'annule pas, puis montre que $f'_4(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$. (1,5 point)

Exercice 4 - Lire des solutions sur les courbes (3 points)

Voici les courbes des fonctions sinus et cosinus sur $[-2\pi; 2\pi]$, avec les droites d'équations

$y = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Chaque réponse doit être justifiée par le cercle trigonométrique, car la lecture graphique sert seulement à vérifier.



1. Résous dans $[-2\pi; 2\pi]$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$. (1 point)
2. Résous de plus dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. (1 point)
3. Trouve enfin, dans $]-\pi; \pi]$, les solutions de l'inéquation $\sin x \geq \frac{1}{2}$. (1 point)

Exercice 5 - Une limite célèbre (2 points)

On rappelle d'abord que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction cosinus.

1. Écris le taux de variation de la fonction sinus entre 0 et x , puis déduis-en que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (1 point)

2. Calcule ensuite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$. (0,5 point)

3. En utilisant de la même façon la fonction cosinus, détermine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$. (0,5 point)

Exercice 6 - La marée dans le port de Kerlouan (4 points)

Un jour de printemps, Maëlle, qui tient la capitainerie d'un petit port breton, relève la hauteur d'eau à l'entrée du chenal. Elle la modélise, pour t compris entre 0 et 12 heures après la pleine mer, par la fonction h définie sur $[0;12]$ par :

$$h(t) = 5 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right), \text{ où } h(t) \text{ est exprimée en mètres.}$$

1. Calcule $h(0)$ et $h(6)$, puis interprète ces deux valeurs. (0,5 point)
2. Montre que, pour tout t de $[0;12]$, $h'(t) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$. (0,5 point)
3. Étudie le signe de $h'(t)$ sur $[0;12]$, puis dresse le tableau de variations de h . (1,5 point)
4. Le voilier de Yanis a besoin d'au moins 6,5 m d'eau pour franchir le chenal. Détermine les périodes de la journée où il peut passer. (1 point)
5. À quel instant la mer descend-elle le plus vite ? Donne alors cette vitesse de baisse, en mètres par heure, arrondie au centième. (0,5 point)



Réviser dérivées de sinus et cosinus avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon fonctions cosinus et sinus ; entraîne-toi sur la fiche fonctions sinus et cosinus avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Étude d'une fonction trigonométrique : contrôle de maths en terminale
- Produit scalaire dans l'espace : contrôle de maths en terminale
- Équation cartésienne d'un plan : contrôle de maths en terminale