

Dérivées et approximation affine

Ce qu'évalue le contrôle : dérivées et approximation affine

L'essentiel du sujet

- Niveau **première**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Dérivation (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer la dérivée des fonctions usuelles et d'une somme de fonctions
- Dériver un produit, un quotient et une fonction de la forme $x \mapsto g(ax + b)$
- Écrire l'approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point et estimer l'erreur commise
- Relier le signe de la dérivée aux variations pour reconnaître une courbe
- Utiliser une approximation affine dans un problème concret de durée de trajet

Avant de commencer

Avant de dériver, **identifie la forme** de la fonction : somme, produit uv , quotient $\frac{u}{v}$ ou composée $g(ax+b)$. Écris ensuite u , v et leurs dérivées à part, puis applique la formule. Pour une approximation affine, calcule d'abord $f(a)$ et $f'(a)$, car tout en découle. Enfin, **compare avec la calculatrice** et vérifie sur la figure que l'approximation est **par excès ou par défaut**.

Le sujet du contrôle : dérivées et approximation affine

Exercice 1 - Dérivées des fonctions usuelles (4 points)

Pour chaque fonction, dérivable sur l'intervalle indiqué, calcule sa fonction dérivée, puis simplifie le résultat.

1. $f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$ sur $\mathbb{R}$. (1 point)

2. $f_2(x) = \frac{2}{x} + x^3$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)

3. $f_3(x) = 4\sqrt{x} - x$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)

4. $f_4(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$. (1 point)

Exercice 2 - Produit, quotient et composée (5 points)

Précise d'abord la forme de chaque fonction, puis calcule sa dérivée sur l'intervalle donné.

1. $g(x) = (2x-1)(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$; donne le résultat sous forme développée. (1 point)

2. $h(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$; montre ensuite que $h'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. (1 point)

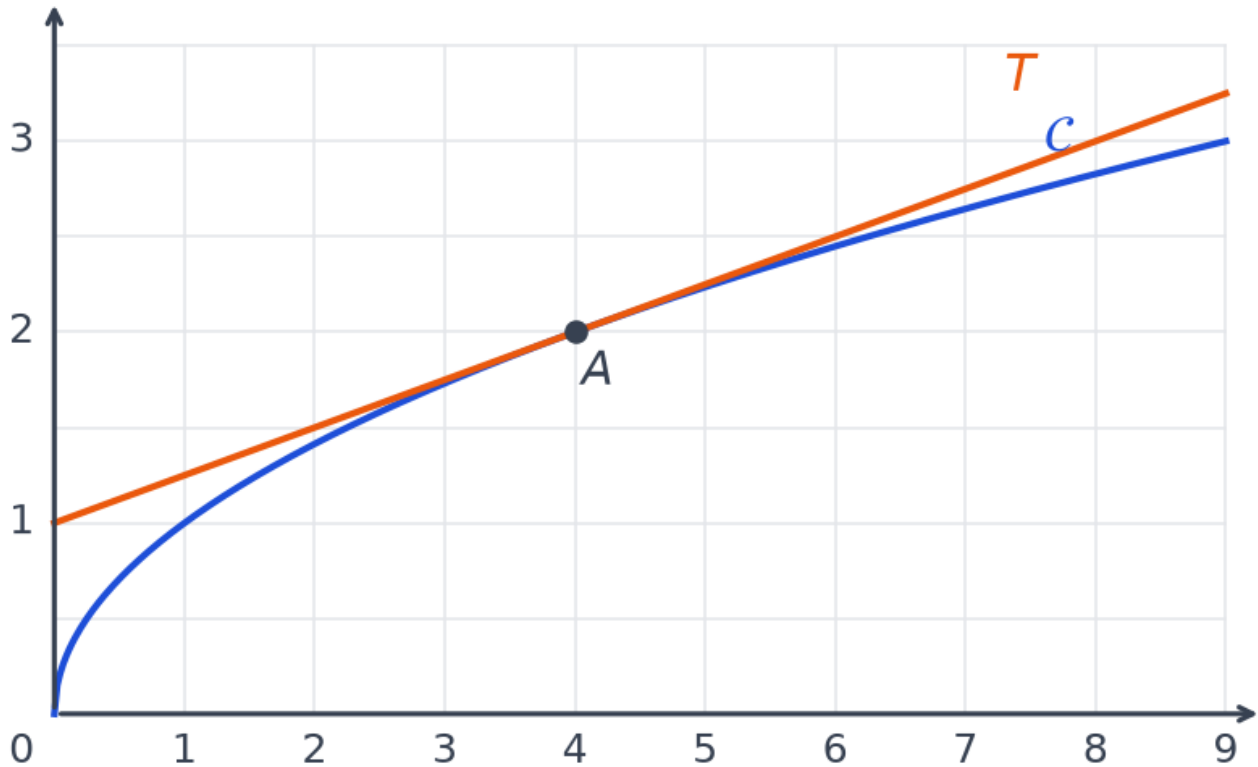
3. $k(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ sur $]2; +\infty[$. (1 point)

4. $m(x) = (2x-3)^3$ sur $\mathbb{R}$, en utilisant la dérivée de $x \rightarrow g(ax+b)$. (1 point)

5. $p(x) = \sqrt{6-2x}$ sur $]-\infty; 3[$. (1 point)

Exercice 3 - La racine carrée près de 4 (4 points)

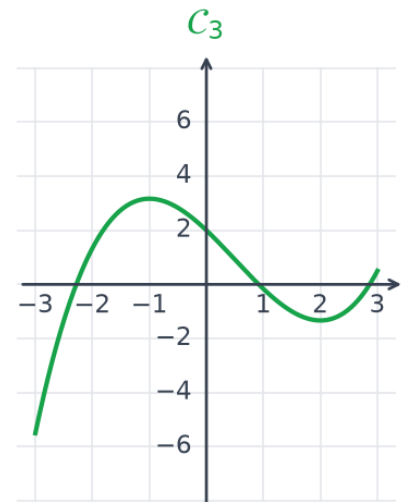
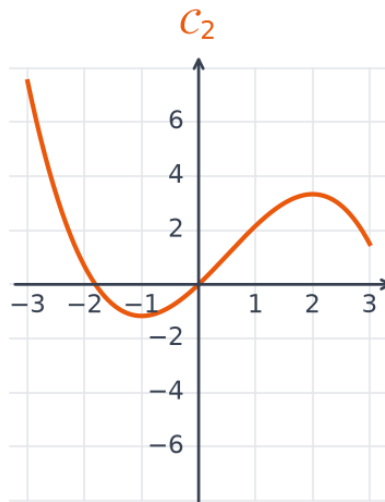
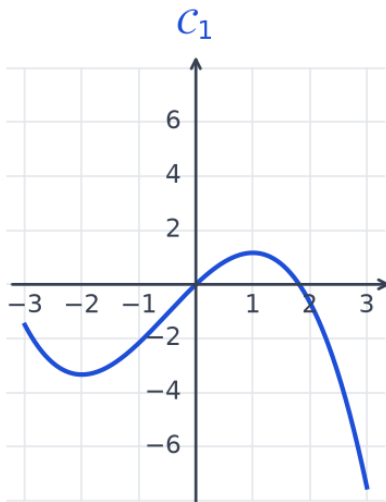
On note f la fonction racine carrée et $\mathcal{C}$ sa courbe. La droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 4.



1. Calcule $f(4)$ et $f'(4)$, puis déduis-en une équation de T . (1 point)
2. Justifie alors que, pour h proche de 0, $\sqrt{4+h} \approx 2 + \frac{h}{4}$. Donne ainsi une valeur approchée de $\sqrt{4,2}$, puis de $\sqrt{3,9}$. (1,5 point)
3. Compare ces deux valeurs aux résultats de la calculatrice, et donne l'erreur commise à 10^{-5} près. (1 point)
4. D'après la figure, ces approximations sont-elles par excès ou par défaut ? Justifie. (0,5 point)

Exercice 4 - Quelle courbe pour h ? (3 points)

Une fonction h est définie et dérivable sur $[-3;3]$, avec $h'(x) = (x+1)(2-x)$. Une seule des trois courbes ci-dessous représente h .



1. Étudie d'abord le signe de $h'(x)$ sur $[-3;3]$ à l'aide d'un tableau de signes. (1 point)
2. Dédus-en ensuite les variations de h . (0,5 point)
3. Quelle courbe représente h ? Explique aussi pourquoi les deux autres ne conviennent pas. (1,5 point)

Exercice 5 - Le trajet de Léna sur l'autoroute (4 points)

Léna parcourt 60 km sur l'autoroute à une vitesse constante v , en km/h, comprise entre 60 et 130. La durée du trajet, en heures, vaut donc $t(v) = \frac{60}{v}$. D'habitude, elle roule à 120 km/h.

1. Calcule $t(120)$, puis $t'(v)$ et $t'(120)$. (1 point)
2. Dédus-en que, pour h proche de 0, $t(120+h) \approx 0,5 - \frac{h}{240}$. (1 point)
3. Estime ainsi, en minutes, la durée du trajet à 126 km/h, puis compare avec la valeur exacte arrondie au centième de minute. (1 point)

4. Léna voudrait gagner 2 minutes par rapport à son trajet habituel. Quelle vitesse l'approximation affine propose-t-elle ? Calcule enfin la vitesse exacte, arrondie au centième. (1 point)



Réviser dérivées et approximation affine avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon dérivée d'une fonction ; entraîne-toi sur la fiche dérivée avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en première** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Nombre dérivé et équation de tangente : contrôle de maths en première
- Second degré et dérivation : contrôle de maths en première
- Suites numériques et modélisation : contrôle de maths en première