

Équation cartésienne d'un plan

Ce qu'évalue le contrôle : équation cartésienne d'un plan

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Produit scalaire dans l'espace (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Déterminer une équation cartésienne d'un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal
- Vérifier qu'un vecteur est normal à un plan défini par trois points non alignés
- Calculer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan
- Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan et en déduire une distance
- Utiliser une distance point-plan pour calculer un volume ou résoudre un problème concret

Avant de commencer

Commence chaque exercice par identifier un **vecteur normal** : ses coordonnées se lisent directement dans les coefficients de x , y et z . Pour une intersection, remplace x , y et z par la représentation paramétrique, puis résous l'équation en t . Vérifie ensuite que le point trouvé satisfait bien l'équation du plan, car cette vérification ne prend que quelques secondes. Enfin, garde les **valeurs exactes** jusqu'au bout.

Le sujet du contrôle : équation cartésienne d'un plan

Dans tout le sujet, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 - Un point et un vecteur normal (3 points)

On considère le point $A(1; -2; 3)$ et le vecteur $\vec{n}(2; -1; 4)$. On note P le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Détermine d'abord une équation cartésienne du plan P . (1 point)
2. Les points $B(3; 2; 3)$ et $C(1; 1; 4)$ appartiennent-ils au plan P ? Justifie ensuite ta réponse. (1 point)
3. Soit ensuite le plan Q d'équation $x + 3y - z + 5 = 0$. Donne un vecteur normal de Q , puis dis si les plans P et Q sont perpendiculaires. (1 point)

Exercice 2 - Le plan passant par trois points (4 points)

Dans cet exercice, on considère aussi les points $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; 0)$ et $C(0; 2; 1)$.

1. Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montre que les points A , B et C ne sont pas alignés. (1 point)
2. Vérifie ensuite que le vecteur $\vec{n}(3; 4; 5)$ est normal au plan (ABC) . (1 point)
3. Dédus-en alors une équation cartésienne du plan (ABC) . (1 point)
4. Le point $D(2; 2; -1)$ est-il dans le plan (ABC) ? Que peut-on alors dire des points A , B ,

C et D ? (1 point)

Exercice 3 - Une droite qui traverse le plan (4 points)

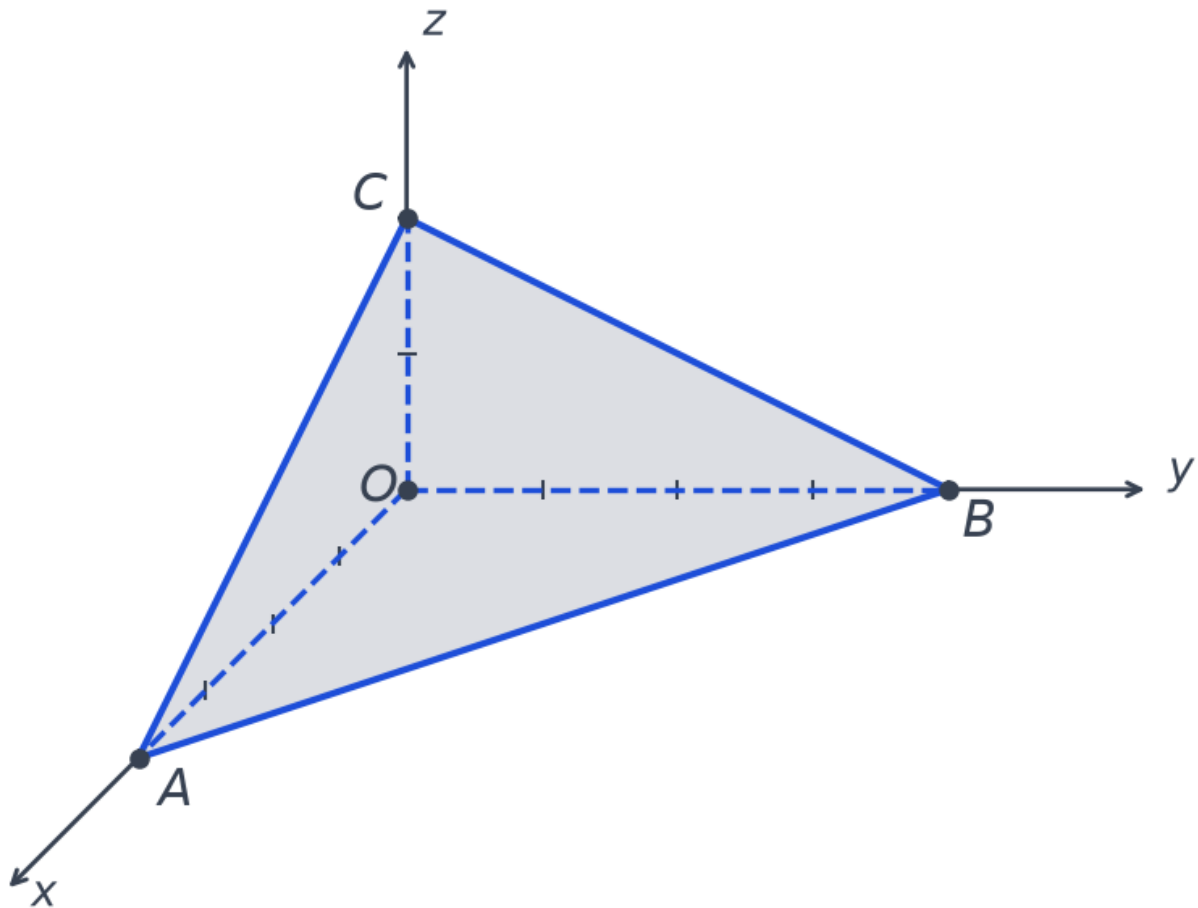
On admet que le plan (ABC) de l'exercice 2 a pour équation $3x+4y+5z-13=0$. Par ailleurs, on considère la droite d de représentation paramétrique :

$$x=1+t, y=-2-t, z=2t, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. Donne un vecteur directeur $\vec{u}$ de d , puis montre que d n'est pas parallèle au plan (ABC) . (1 point)
2. Détermine ensuite les coordonnées du point d'intersection I de la droite d et du plan (ABC) . (1,5 point)
3. La droite d est-elle orthogonale au plan (ABC) ? Justifie. (0,5 point)
4. On note M le point de d obtenu pour $t=0$. Écris une représentation paramétrique de la droite Δ passant par M et orthogonale au plan (ABC) . (1 point)

Exercice 4 - Le tétraèdre OABC (5 points)

On considère maintenant les points $A(4;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;2)$. Le tétraèdre $OABC$ est représenté ci-dessous, avec la face ABC grisée.



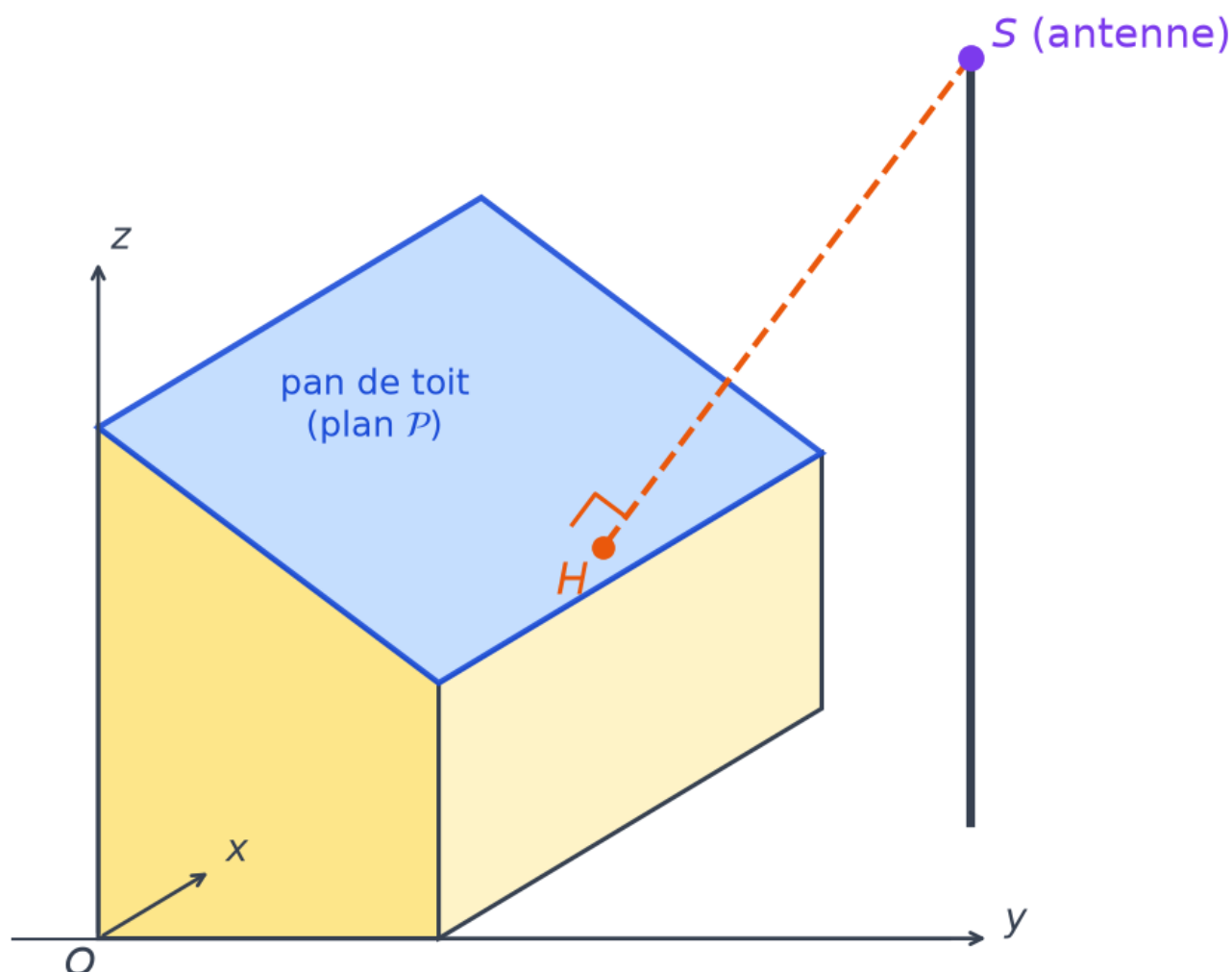
1. Montre que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x+y+2z-4=0$. (1 point)
2. Donne ensuite une représentation paramétrique de la droite Δ passant par O et orthogonale au plan (ABC) . (1 point)
3. Calcule alors les coordonnées du point H , projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) . (1 point)
4. Déduis-en la distance OH du point O au plan (ABC) , en valeur exacte. (1 point)
5. Calcule le volume du tétraèdre en prenant OAB pour base. Puis, en utilisant la hauteur OH , déduis-en l'aire exacte du triangle ABC . (1 point)

Exercice 5 - Le câble de l'antenne (4 points)

Léandre installe une antenne au sommet d'un mât planté dans son jardin. Ainsi, il veut la relier

par un câble tendu au pan de toit de son abri, le plus court possible. L'unité du repère est le mètre, et le sol est le plan d'équation $z = 0$.

Le pan de toit est contenu dans le plan P d'équation $3y + 4z - 24 = 0$. Il est limité par le faîtage, où $y = 0$, et par la gouttière, où $y = 4$, pour x compris entre 0 et 10. Enfin, le sommet de l'antenne est le point $S(5;8;9)$.



La figure n'est pas à l'échelle.

1. Vérifie que les points $F(0;0;6)$, $E(10;0;6)$ et $G(0;4;3)$ appartiennent au plan P . (1 point)
2. Donne alors une représentation paramétrique de la droite passant par S et orthogonale au plan P . (1 point)
3. Calcule les coordonnées du projeté orthogonal H de S sur P , puis vérifie que H est bien sur le pan de toit. (1 point)

4. Léandre dispose d'un câble de 7 mètres. Est-il assez long pour relier S au toit ? Justifie, car la réponse doit être prouvée. (1 point)



Réviser équation cartésienne d'un plan avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon produit scalaire dans l'espace ; entraîne-toi sur la fiche produit scalaire de l'espace avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Produit scalaire dans l'espace : contrôle de maths en terminale
- Étude de fonction avec logarithme : contrôle de maths en terminale
- Dérivées de sinus et cosinus : contrôle de maths en terminale