

Équations différentielles

Ce qu'évalue le contrôle : équations différentielles

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Primitives et équations différentielles (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Résoudre les équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$ en déterminant la solution particulière constante
- Déterminer l'unique solution qui vérifie une condition initiale donnée
- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation avec second membre et en déduire toutes les solutions
- Interpréter graphiquement une famille de solutions et leur limite commune
- Modéliser un refroidissement ou une élimination et calculer un temps de seuil à l'aide du logarithme népérien

Avant de commencer

Pour $y' = ay + b$, cherche d'abord la **solution constante**, car elle donne aussitôt la forme générale des solutions. Ensuite, utilise la **condition initiale** pour fixer la constante, puis vérifie

ton résultat en dérivant, car une erreur de signe sur a passe facilement inaperçue. Dans les problèmes, écris l'inéquation avant de passer au logarithme et, enfin, pense à changer le sens de l'inégalité quand tu divises par un nombre négatif. Donne alors le temps avec son unité et un arrondi raisonnable.

Le sujet du contrôle : équations différentielles

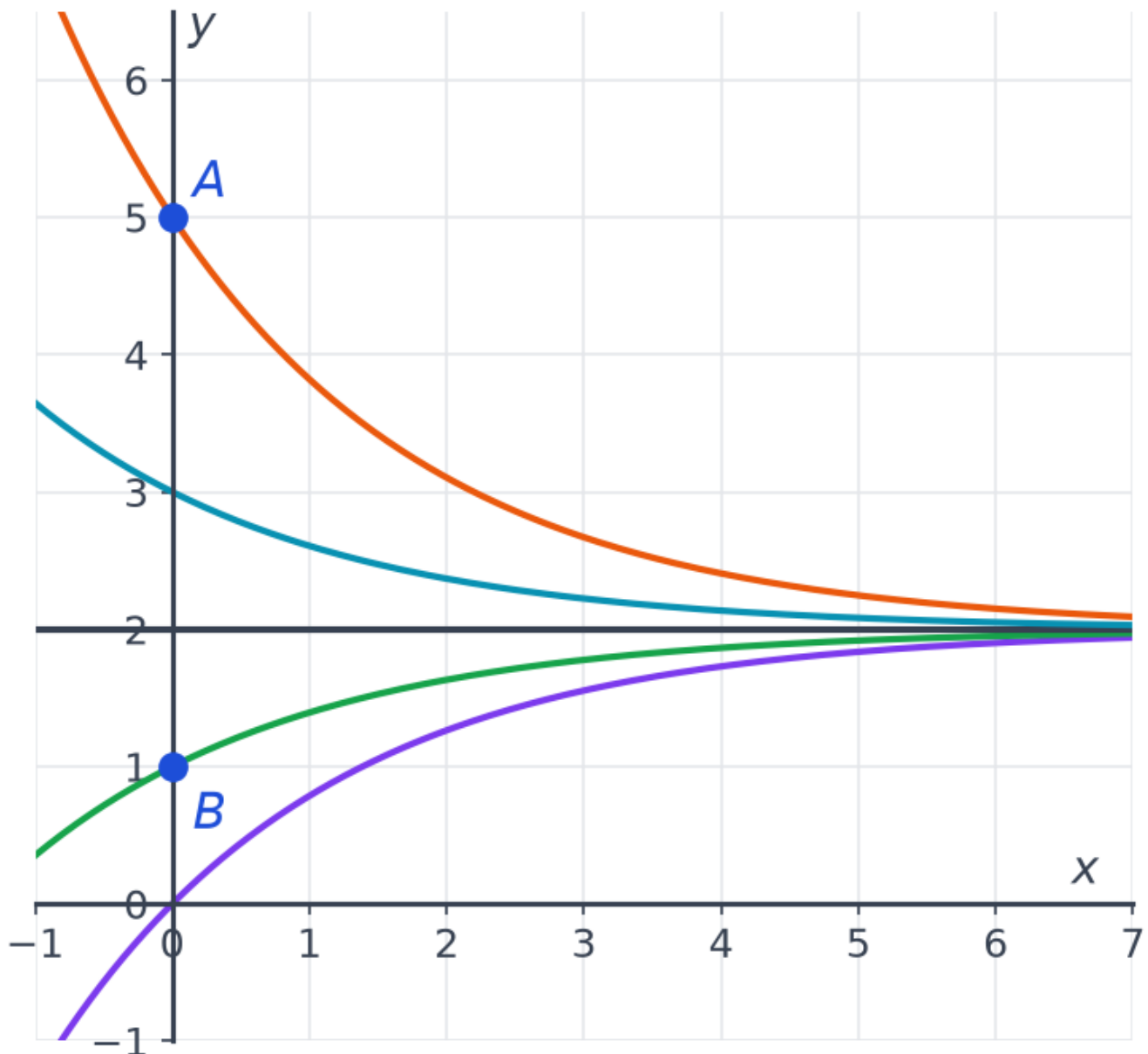
Exercice 1 - Premiers automatismes (3 points)

Dans tout l'exercice, les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Donne d'abord toutes les solutions de l'équation $y' = -2y$. (0,5 point)
2. Détermine ensuite la solution f de $y' = 3y$ telle que $f(0) = 5$. (0,5 point)
3. Trouve la solution constante de $y' = 4y - 8$, puis écris toutes les solutions de cette équation. (1 point)
4. Enfin, on pose $g(x) = e^{2x} - 1$. Vérifie par le calcul que g est solution de l'équation $y' = 2y + 2$. (1 point)

Exercice 2 - Une famille de courbes solutions (4 points)

On considère l'équation différentielle $(E_1): y' = -0,5y + 1$. Le graphique ci-dessous montre cinq courbes de solutions de (E_1) , ainsi que les points $A(0;5)$ et $B(0;1)$.



1. Détermine la solution constante de (E_1) . (0,5 point)
2. Dédus-en alors la forme générale des solutions de (E_1) . (1 point)
3. Calcule ensuite l'expression de la solution f dont la courbe passe par le point A . (1 point)
4. Quelle est la limite en $+\infty$ de chaque solution ? Interprète alors ce résultat sur le graphique. (1 point)
5. Écris l'expression de la solution h dont la courbe passe par B , puis donne son sens de variation sur $\mathbb{R}$. (0,5 point)

Exercice 3 - Un second membre non constant (4 points)

On étudie l'équation $(E): y' = -y + 2x + 3$ et l'équation sans second membre $(E_0): y' = -y$.
On pose ensuite $p(x) = 2x + 1$ pour tout réel x .

1. Vérifie d'abord que p est une solution de (E) . (1 point)
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontre que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E_0) . (1 point)
3. Résous (E_0) , puis déduis-en toutes les solutions de (E) . (1 point)
4. Détermine la solution de (E) qui s'annule en 0. (1 point)

Exercice 4 - L'élimination d'un médicament (4 points)

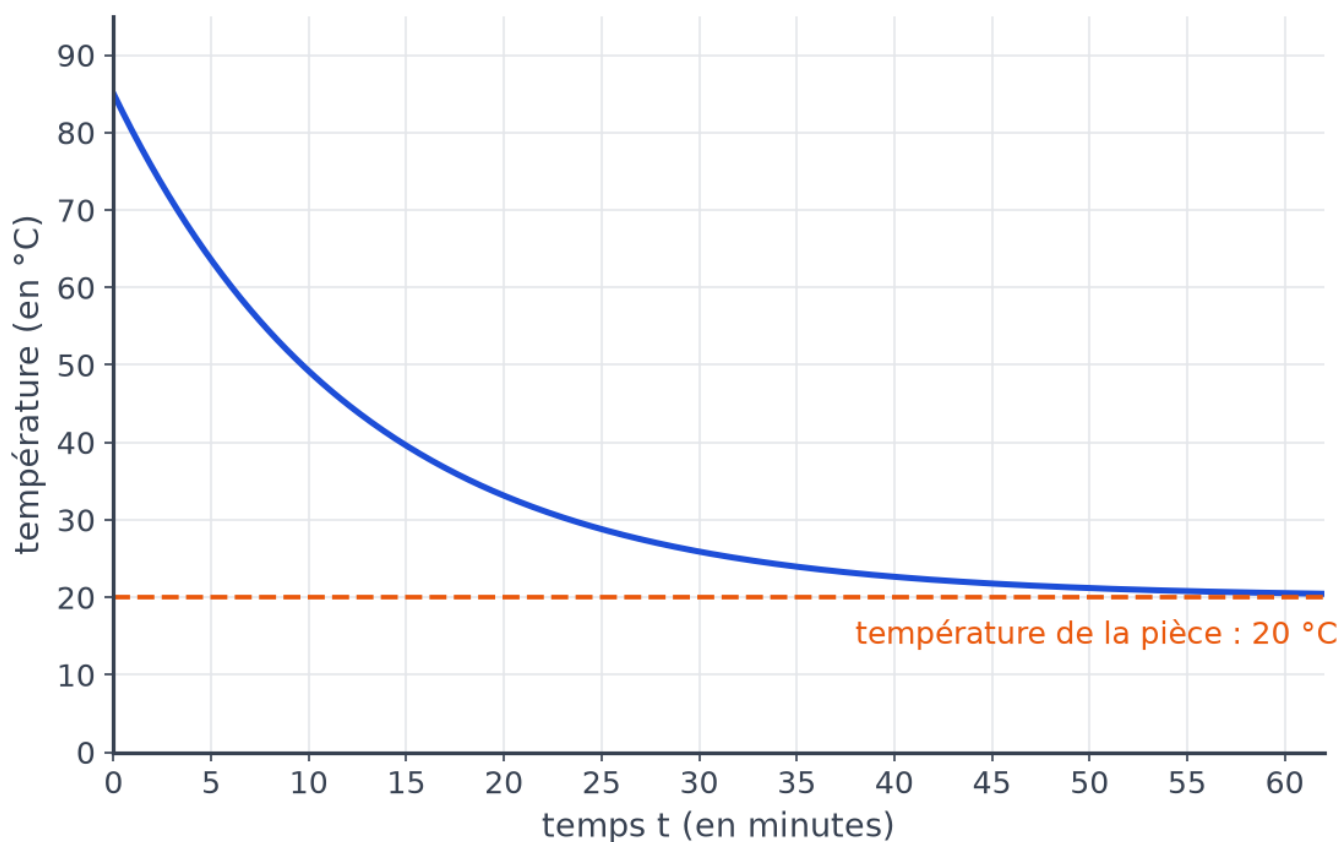
Lina reçoit une injection d'un antidouleur. On note $C(t)$ la concentration du produit dans le sang, en mg/L, t heures après l'injection. On admet que C vérifie $C'(t) = -0,25C(t)$ pour $t \geq 0$, avec $C(0) = 8$.

1. Exprime d'abord $C(t)$ en fonction de t . (1 point)
2. Calcule la concentration deux heures après l'injection, arrondie au centième. (1 point)
3. La demi-vie est la durée au bout de laquelle la concentration initiale est divisée par deux. Calcule sa valeur exacte, puis donne-la en heures et minutes. (1 point)
4. Le produit n'agit plus lorsque sa concentration passe sous 1 mg/L. Au bout de combien de temps cela se produit-il ? Justifie avec le logarithme népérien. (1 point)

Exercice 5 - Le café de Timothée (5 points)

Timothée se sert un café à 85 °C dans une pièce à 20 °C. On note $\theta(t)$ la température du café,

en °C, après t minutes. D'après la loi de refroidissement de Newton, on a $\theta'(t) = -0,08(\theta(t) - 20)$ pour $t \geq 0$, avec $\theta(0) = 85$. La courbe de θ est ainsi tracée ci-dessous.



1. Montre que l'équation s'écrit sous la forme $y' = ay + b$ en précisant les réels a et b . (0,5 point)
2. Résous cette équation, puis démontre que $\theta(t) = 65e^{-0,08t} + 20$. (1,5 point)
3. Étudie le sens de variation de θ et sa limite en $+\infty$. Interprète ensuite ces résultats dans le contexte. (1 point)
4. Calcule aussi la température du café au bout de 10 minutes, arrondie au dixième. (0,5 point)
5. Timothée attend que son café descende sous 55 °C pour le boire. Combien de temps doit-il patienter ? Donne le résultat à la seconde près. (1,5 point)



Réviser équations différentielles avant le contrôle

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Primitives de fonctions usuelles : contrôle de maths en terminale
- Primitives et calcul intégral : contrôle de maths en terminale
- Étude d'une fonction trigonométrique : contrôle de maths en terminale