

Espérance et loi des grands nombres

Ce qu'évalue le contrôle : espérance et loi des grands nombres

L'essentiel du sujet

- Niveau **terminale**
- Durée **1 heure 30**
- Calculatrice **autorisée**
- Barème **sur 20**

Chapitre : Loi binomiale et variables aléatoires (5 exercices)

Ce que ce devoir vérifie :

- Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire à partir de sa loi
- Utiliser la linéarité de l'espérance et la variance d'une somme de variables indépendantes
- Majorer une probabilité d'écart à l'espérance avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Déterminer une taille d'échantillon minimale grâce à l'inégalité de concentration
- Interpréter la loi des grands nombres dans une situation concrète

Avant de commencer

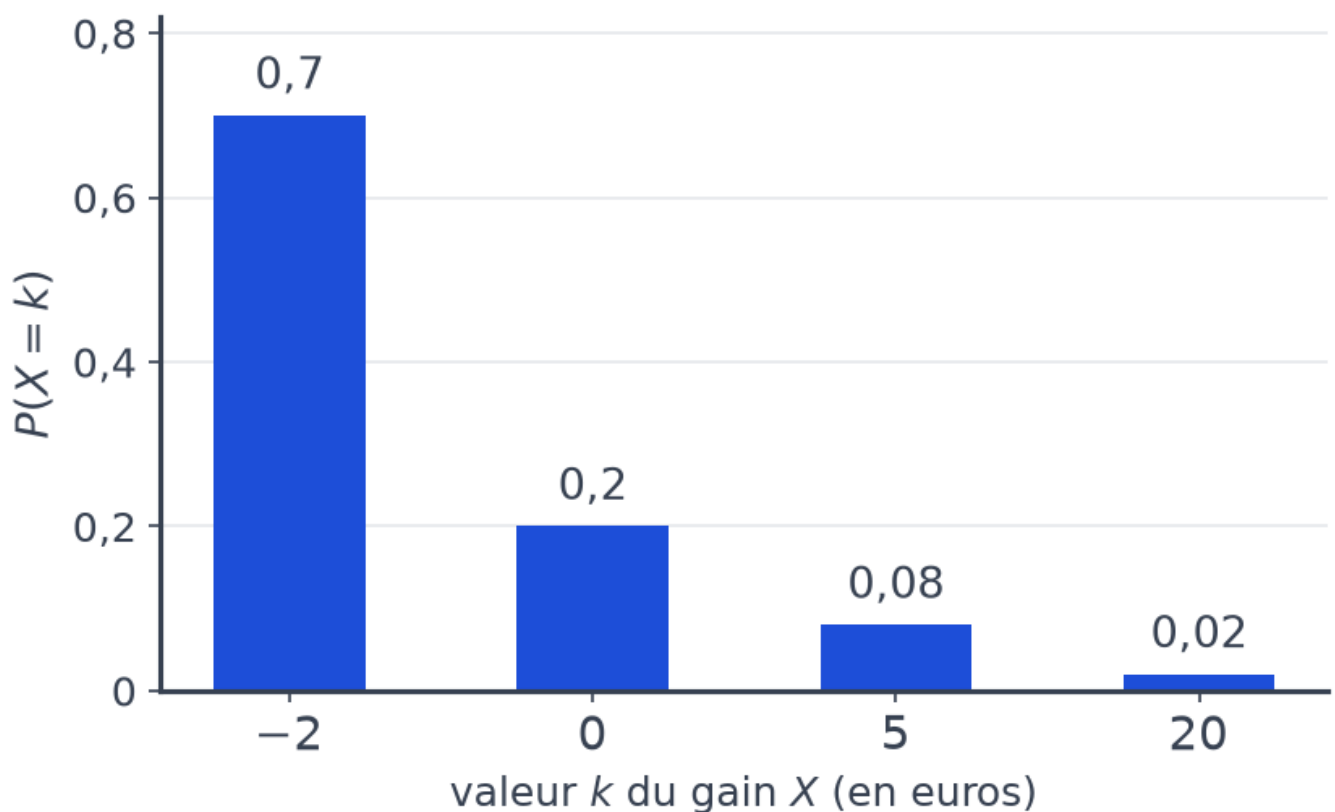
Avant chaque calcul, écris clairement la variable étudiée et son unité. Pour une variance de somme, cite toujours l'**indépendance**, car sans elle la formule ne s'applique pas. Quand une inégalité est demandée, repère d'abord l'écart δ et vérifie qu'il est **centré sur l'espérance**.

Enfin, relis chaque conclusion : une majoration ne donne jamais une valeur exacte.

Le sujet du contrôle : espérance et loi des grands nombres

Exercice 1 - Le ticket à gratter de l'association (4 points)

Pour financer un voyage, l'association sportive du lycée vend des tickets à gratter à 2 € l'unité. On note X le gain algébrique d'un joueur, c'est-à-dire la valeur du lot moins le prix du ticket, en euros. Sa loi est alors représentée par le diagramme ci-dessous.



1. Vérifie d'abord que ce diagramme définit bien une loi de probabilité. (0,5 point)
2. Calcule l'espérance $E(X)$, puis interprète le résultat pour un joueur. (1 point)
3. Calcule ensuite la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$, arrondi au centième. (1,5 point)

4. L'association vend 500 tickets, et on admet que les gains des joueurs sont indépendants. Quel bénéfice peut-elle espérer ? Justifie à l'aide de la linéarité de l'espérance. (1 point)

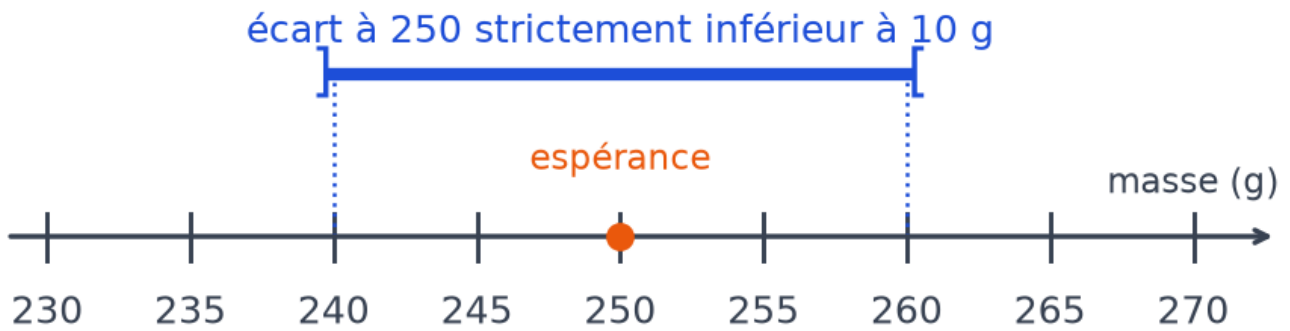
Exercice 2 - Bus et tram pour aller au lycée (3 points)

Chaque matin, Soumaya prend le bus puis le tram. On note T_1 la durée du trajet en bus et T_2 celle du trajet en tram, en minutes. On sait que $E(T_1) = 18$, $V(T_1) = 9$, $E(T_2) = 12$ et $V(T_2) = 4$. De plus, les variables T_1 et T_2 sont indépendantes. On pose alors $T = T_1 + T_2$.

1. Calcule l'espérance de la durée totale T . (0,5 point)
2. Détermine $V(T)$, puis $\sigma(T)$ arrondi au centième. Précise la propriété utilisée. (1 point)
3. Sur une semaine de 5 jours, les durées $T^{(1)}, \dots, T^{(5)}$ sont indépendantes et suivent la loi de T . On note S leur somme. Calcule $E(S)$ et $V(S)$. (1 point)
4. Donne enfin l'espérance et la variance de la durée moyenne $M = \frac{S}{5}$. (0,5 point)

Exercice 3 - Des paquets de café sous contrôle (4 points)

Une torréfaction remplit des paquets de café. La masse d'un paquet pris au hasard, en grammes, est une variable aléatoire Z d'espérance $E(Z) = 250$ et de variance $V(Z) = 16$. Cependant, la loi exacte de Z n'est pas connue.



1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majore $P(|Z-250| \geq 10)$. (1 point)
2. Déduis-en une minoration de la probabilité qu'un paquet ait une masse comprise strictement entre 240 g et 260 g. (1 point)
3. Trouve le plus petit écart δ pour lequel l'inégalité garantit $P(|Z-250| \geq \delta) \leq 0,04$. Traduis ensuite ce résultat par une phrase. (1 point)
4. Montre que, pour toute variable aléatoire Y de variance non nulle et d'écart type σ , on a $P(|Y-E(Y)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$. (1 point)

Exercice 4 - Les bulbes de tulipes (4 points)

Dans une jardinerie, 20 % des bulbes de tulipes ne fleurissent pas. Hugo prélève un échantillon de n bulbes, assimilé à un tirage avec remise. Pour chaque bulbe i , on note X_i la variable qui vaut 1 si le bulbe ne fleurit pas et 0 sinon. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont donc indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre 0,2. On note M_n leur moyenne.

1. Rappelle l'espérance et la variance de X_1 , puis déduis-en $E(M_n)$ et $V(M_n)$. (1 point)
2. Pour $n = 400$, utilise l'inégalité de concentration afin de minorer $P(0,15 < M_{400} < 0,25)$. (1 point)
3. Détermine la plus petite taille n pour laquelle l'inégalité de concentration assure $P(|M_n - 0,2| \geq 0,05) \leq 0,01$. (1,5 point)
4. Énonce la loi des grands nombres dans ce contexte, puis interprète-la par une phrase. (0,5 point)

point)

Exercice 5 - Le stand de chamboule-tout (5 points)

À la fête foraine, Gaspard tient un stand de chamboule-tout. Une partie coûte 2 €. Le joueur renverse toutes les boîtes avec une probabilité de 0,25 : il remporte alors une peluche qui coûte 4 € à Gaspard. Sinon, il ne gagne rien, car la partie est perdue. On note G le gain algébrique de Gaspard sur une partie, en euros.

1. Justifie que G prend les valeurs -2 et 2 , donne sa loi, puis montre que $E(G) = 1$ et $V(G) = 3$. (1,5 point)
2. Un samedi, Gaspard organise 100 parties indépendantes. On note S la somme des gains de ces parties. Calcule $E(S)$ et $V(S)$. (1 point)
3. Justifie que $P(S \leq 0) \leq P(|S - 100| \geq 100)$, puis montre que la probabilité que Gaspard ne gagne rien, voire perde de l'argent, ce samedi est inférieure ou égale à 0,03. (1,5 point)
4. On note M_n le gain moyen par partie sur n parties indépendantes. Quel nombre minimal de parties l'inégalité de concentration impose-t-elle pour garantir $P(M_n \leq 0) \leq 0,01$? (1 point)



Réviser espérance et loi des grands nombres avant le contrôle

Si un exercice t'a bloqué, relis la leçon probabilités et loi binomiale ; entraîne-toi sur la fiche probabilités conditionnelles avant de retenter le sujet.

La page **contrôles de maths en terminale** regroupe les 25 sujets de l'année, et la rubrique contrôles corrigés du CP à la terminale permet de changer de niveau.

Sujets proches à faire ensuite

- Loi binomiale et schéma de Bernoulli : contrôle de maths en terminale
- Dénombrement et loi binomiale : contrôle de maths en terminale
- Intégrales et calcul d'aires : contrôle de maths en terminale